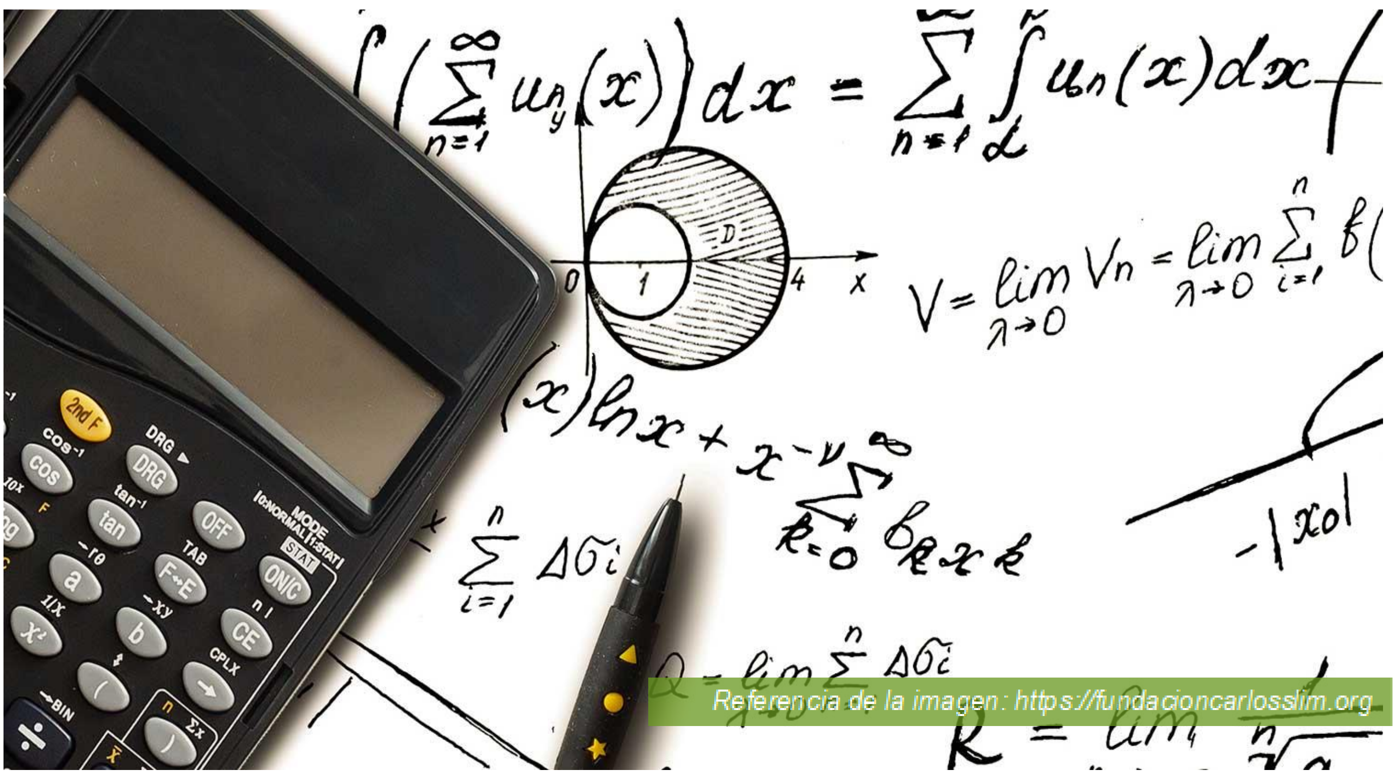
Programa de la asignatura:

Cálculo diferencial

U2 Límites y continuidad

U2. Límites y continuidad



Referencia de la imagen: https://fundacioncarlosslim.org

Índice

Presentación de la unidad

En esta unidad se revisa el concepto de límite de una función, donde cuyo dominio y el recorrido son elementos llamados subconjuntos de conjunto de los números reales.

Lo que se pretende en esta unidad, es que conozcas las propiedades del límite, aplicados a una función, su continuidad y las propiedades de una continuidad de los límites. Al transcurso de la unidad, podrás constatar que una función, tiene ciertos elementos que permiten su continuidad de acuerdo, esto de acuerdo a los valores que tome, la variable dependiente e independiente.

A partir de estos conceptos, te permitirán demostrar el concepto de límite, su aplicación en diversos contextos, para que relaciones los contenidos teóricos con los prácticos.

Propósitos

- **Identificar** que el límite es único.
- **Relacionar** el límite con las operaciones de funciones y determinar los límites unilaterales.
- **Identificar** el concepto de continuidad de funciones y su relación con el límite.
- **Aplicar** las propiedades de la continuidad de funciones.

Competencia específica

Utilizar el concepto de límite para analizar la continuidad y la derivada de una función, utilizando las propiedades de los límites.

Foro de dudas

*Recuerda consultar y participar en este espacio de diálogo, en él podrás también resolver tus inquietudes de esta segunda unidad, asimismo puedes apoyar a tus compañeros(as) en solucionar sus inquietudes, siempre y cuando cuentes con la respuesta correcta basada en fuentes confiables.

Planeación del docente en línea

*Recuerda que en este espacio se plasmará cómo desempeñarte en esta unidad, **consúltalo** ya que estará cambiando constantemente.

Actividades

Conforme vayas avanzando en el estudio de esta unidad, puedes ir realizando las actividades correspondientes a esta unidad. La descripción de las mismas puedes encontrarla en el espacio *Planeación del docente en línea,* ahí te marcarán:

- Instrucciones específicas de lo que deberás realizar.
- Características de los entregables.
- Criterios de evaluación que se tomarán en cuenta.
- Fecha de entrega.

Guía de operación de actividades para el estudiante UnADM

Recuerda que puedes utilizar la *Guía de operación de actividades para el estudiante UnADM* para que conozcas los elementos de la asignatura, así como del aula destinada para que realices tus actividades. Ésta la encontrarás en la sección *Material de apoyo*.

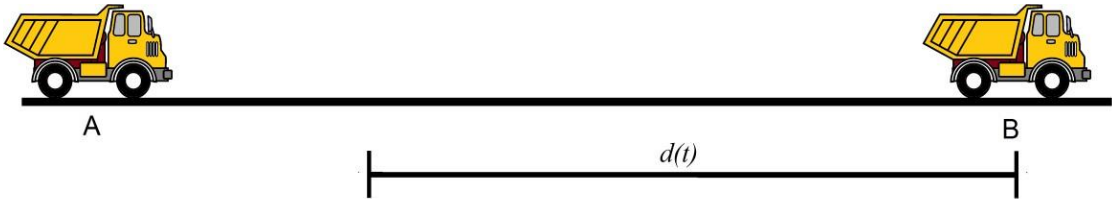
Límites

El límite de un función es uno de los conceptos más importantes que hay en el cálculo, a través de este de definen otros conceptos importante como lo son la continuidad, la derivada, la integral, entre otros.

Concepto de límite de una función

Casi en todos los lenguajes, la palabra límite tiene virtualmente el mismo contexto que la palabra frontera. Sin embargo, en cálculo tiene un sentido diferente. El límite de una función, en un cierto punto, es el comportamiento que tiene dicha función cerca de este punto.

Ejemplo: Considera un vehículo que viaja del punto A al punto B, dicho recorrido lo realiza en una hora exacta. Partiendo de lo anterior, se tiene la función que a cada instante de tiempo t en minutos se le asigna la distancia $d(t)$ que es distancia que le falta para concluir su recorrido, como lo muestra la siguiente figura:



Como el recorrido se lleva a cabo en una hora exacta, a medida que el tiempo t se va acercando a 60 min , la distancias $d(t)$ está cada vez es más cercana a 0 . Hay que observar que para concluir que $d(t)$ se acerca a cero, no depende de la distancia que se tenga cuando hayan transcurrido 60 min .

Intuitivamente, el concepto de límite es el siguiente: **la función f tiende a L cerca de x_0 si se puede hacer que $f(x)$ este tan cerca como se quiera de L tomando a x suficientemente cercano a x_0.**

Ejemplo: Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ y el valor $x_0=-1$, tomando valores cercanos menores y mayores a $x_0=-1$ se tiene lo siguiente:

$x<-1$	$f(x)$	$x>-1$	$f(x)$
-1.5	$\dfrac{(-1.5)^2-1}{(-1.5)-1}=-2.5$	-0.5	$\dfrac{(-0.5)^2-1}{(-0.5)-1}=-1.5$
-1.4	$\dfrac{(-1.4)^2-1}{(-1.4)-1}=-2.4$	-0.6	$\dfrac{(-0.6)^2-1}{(-0.6)-1}=-1.6$
-1.3	$\dfrac{(-1.3)^2-1}{(-1.3)-1}=-2.3$	-0.7	$\dfrac{(-0.7)^2-1}{(-0.7)-1}=-1.7$
-1.2	$\dfrac{(-1.2)^2-1}{(-1.2)-1}=-2.2$	-0.8	$\dfrac{(-0.8)^2-1}{(-0.8)-1}=-1.8$
-1.1	$\dfrac{(-1.1)^2-1}{(-1.1)-1}=-2.1$	-0.9	$\dfrac{(-0.9)^2-1}{(-0.9)-1}=-1.9$

Tabla 1.

En apariencia la función se aproxima a 2 cuando x se aproxima a -1. El valor menor más cercano a $x_0=-1$ es -1.1 y el valor mayor más cercano a $x_0=-1$, una pregunta natural que puedes plantearte ¿es suficiente este acercamiento? o ¿tengo que tomar un valor más cercano? Para intentar resolver estas preguntas, considera el siguiente acercamiento por valores menores y mayores a $x_0=-1$:

$x<-1$	$f(x)$	$x>-1$	$f(x)$
-1.1	-2.1	-0.9	-1.9
-1.08	-2.08	-0.92	-1.92
-1.06	-2.06	-0.94	-1.92
-1.04	-2.04	-0.96	-1.96
-1.02	-2.02	-0.98	-1.98

Tabla 2.

De nuevo, aparentemente, se tiene que $f(x)$ se aproxima a 2 cuando x se aproxima a -1. De nuevo es natural preguntarse: ¿ya me acerqué demasiado?, para responder esta pregunta se presenta el siguiente acercamiento:

$x<-1$	$f(x)$	$x>-1$	$f(x)$
-1.01	-2.01	-0.99	-1.99
-1.001	-2.001	-0.999	-1.999
-1.0001	-2.0001	-0.9999	-1.9999
-1.00001	-2.00001	-0.99999	-1.99999
-1.00001	-2.000001	-0.999999	-1.999999

Tabla 3.

La tabla anterior presenta de manera más clara que $f(x)$ se aproxima a 2 cuando x se aproxima a -1.

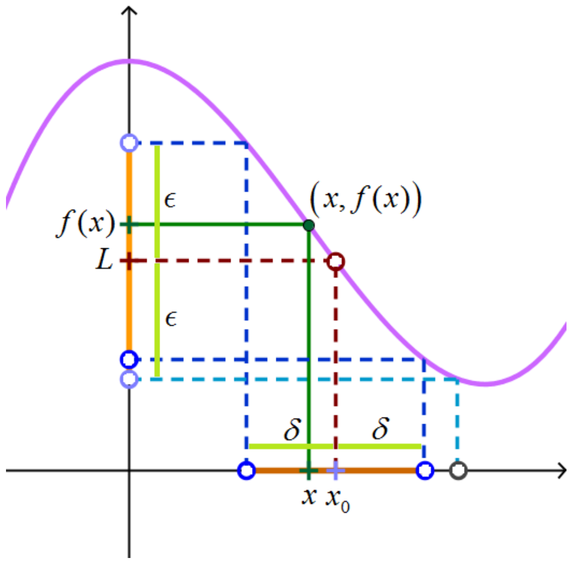
Hay que observar que el proceso anterior depende de la palabra cercanía, matemáticamente se dice que x **es cercano a** y si la diferencia entre ellos es un número "pequeño", es decir, existe $r>0$, con r pequeño, tal que $|x-y|<r$. En consecuencia el hecho de que $f(x)$ **este tan cerca** L significa que existe $\epsilon>0$, con ϵ pequeño, tal que $|f(x)-L|<\epsilon$ y de manera similar que x **esté suficientemente cercano a** x_0 significa que $x\neq x_0$ y que existe $\delta>0$, con δ pequeño, tal que $0<|x-x_0|<\delta$. Finalmente, el enunciado $f(x)$ **este tan cerca como se quiera de** L se traduce para cualquier $\epsilon>0$, se tiene que $|f(x)-L|<\epsilon$. Agrupando las observaciones anteriores se tiene la definición formal de límite:

Definición 2.1.1.1. Se dice que la función $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a x_0 si y sólo si para todo $\epsilon>0$ existe $\delta>0$, que depende de ϵ, tales que:

$$|f(x)-L|<\epsilon \quad \text{si} \quad 0<|x-x_0|<\delta$$

En tal caso, se denota por $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ ó $f(x) \to L$ cuándo $x \to x_0$.

De forma gráfica el concepto de límite se presenta de la siguiente manera:

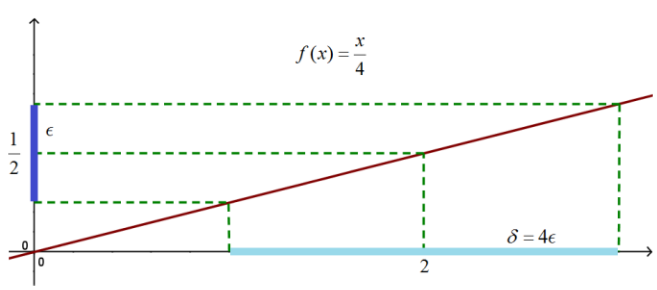


Representación gráfica del límite 1.

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x\to 2} \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$. En efecto, primero hay que identificar los elementos, en este caso la función es $f(x) = \frac{x}{4}$, ellímite es $L = \frac{1}{2}$ y el valor en cuestión es $x_0 = 2$. Para $\epsilon > 0$, hay que encontrar un valor $\delta > 0$ que cumplan con la definición de límite. Se tiene lo siguiente:

$$|f(x) - L| = \left|\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-2}{4}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| |x-2| = \frac{1}{4}|x-2|$$

Por consiguiente, la condición $|f(x) - L| < \epsilon$ se traduce en $\frac{1}{4}|x-2| < \epsilon$ por consiguiente $|x-2| < 4\epsilon$, luego basta tomar $\delta = 4\epsilon$ para que se cumpla la condición de límite. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Representación gráfica del límite 2.

Advertencia: la definición de límite solo permite demostrar que el límite de la función en un punto determinado es correcto, mas no proporciona un método para calcularlo dicho valor, además encontrar el valor de δ a partir del ϵ dado, no siempre es fácil, como se muestra a continuación:

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, en efecto, observa que la función es $f(x) = x^2$, el límite en supuesto límite es $L = x_0^2$ y el punto es cuestión es $x_0 = a$. Se tiene que:

$$\epsilon > |f(x) - L| = |x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x-a||x+a|$$

Por otra parte, observando si la distancia entre x y a es menor que 1 se tiene que $1 > |x-a| \geq |x| - |a|$, es decir, $|x| < 1 + |a|$ esto que implica que:

$$|x+a| \leq |x| + |a| < (1+|a|) + |a| = 1 + 2|a|$$

Finalmente, se define $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1+2|a|}\right\}$ y se tiene lo siguiente:

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a| < \left(\frac{\epsilon}{1+2|a|}\right)(1+2|a|) = \epsilon$$

Por lo tanto $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$.

Para observar que una función no tiene límite en un determinado valor, hay que analizar porque no se cumple la definición de límite, es decir, hay que **negar** la condición:

> Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ talque, para todo x si $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Dicha expresión en la siguiente:

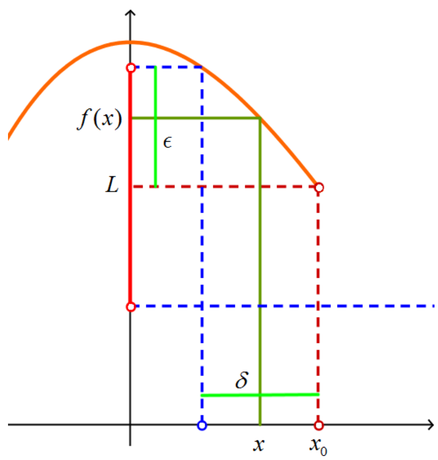
> Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x para el cual es $0 < |x - x_0| < \delta$ eso implica que $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

La anterior definición no es fácil de emplear, en la siguiente sección se presenta la propiedad de unicidad y a partir de ella, se presenta una técnica más sencilla para mostrar que un límite no existe.

En el ejemplo de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ se hacen aproximaciones al valor $x_0 = -1$ por valores menos y mayores respectivamente, este tipo de acercamientos toman el nombre de **límites unilaterales,** los cuales se clasifican en **límites por la izquierda** y **límites por la derecha** dependiendo si el acercamiento es por valores menores o valores mayores respectivamente.

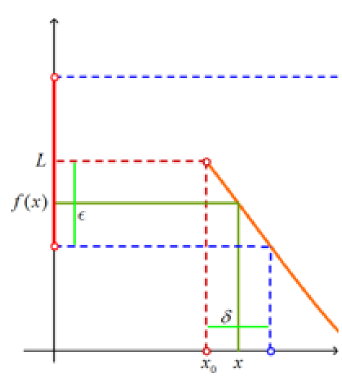
Los limites unilaterales de una función de definen de la siguiente forma:

(i). Se dice que $f(x)$ **tiende a** L **cuando** x **tiende a** x_0 **por la izquierda** si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sí $0 < x_0 - x < \delta$. En tal caso se denota por $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^-$ ó $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 1.

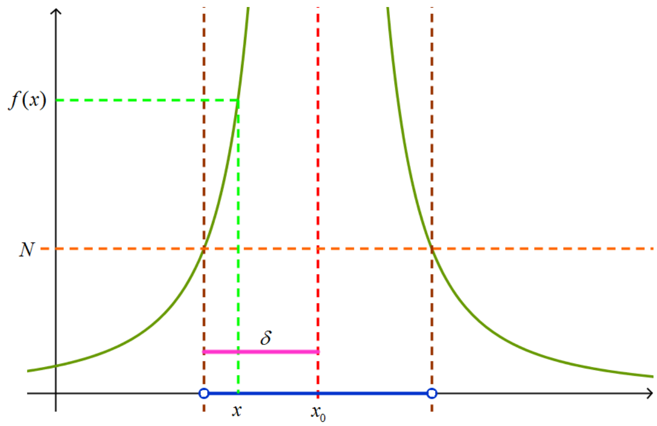
(ii). Se dice que $f(x)$ **tiende a** L **cuando** x **tiende a** x_0 **por la derecha** si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sí $0 < x - x_0 < \delta$. En tal caso se denota por $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^+$ ó $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 2.

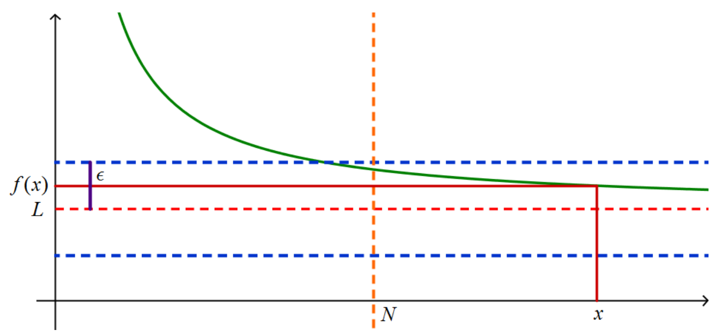
Para finalizar esta parte se presenta como interactúan los conceptos de límite e infinito, presentando el significado de límite infinito y límite al infinito. En el primer caso se entiende que la función crece sin acotamiento y en el segundo caso la variable crece sin acotamiento.

Se dice que $f(x)$ **tiende a** ∞ **cuando** x **tiende a** x_0 si y sólo si para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq N$ sí $0 < |x - x_0| < \delta$. En tal caso se denota por $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ ó $f(x) \to \infty$ cuando $x \to x_0$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 3.

Por último se dice que $f(x)$ **tiende a** L **cuando** x **tiende a** ∞ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$, si $x \geq N$. En tal caso se denota por $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ ó $f(x) \to L$ cuando $x \to \infty$. Gráficamente se tiene lo siguiente:



Límites unilaterales 4.

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, en efecto, sea $\epsilon > 0$ tal que $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \epsilon$, entonces $x > \frac{1}{\epsilon}$, basta tomar el valor N cualquier natural mayor o igual a $\frac{1}{\epsilon}$.

Ejemplo: Se tiene que $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, en efecto, sea $N \in$ tal que $\frac{1}{x} \geq N$, entonces $\frac{1}{N} \geq x$, así basta tomar $\delta = \frac{1}{N+1}$.

Propiedades de los límites

En la sección anterior se presentó la definición formal de límite de una función en términos de $\epsilon - \delta$, en ningún momento de presenta una técnica o un método para proponer el valor del límite de la función, en esta sección se presentan las propiedades fundamentales de los límites las cuales son muy útiles en el cálculo de los mismos.

Una pregunta natural sobre los límites es: ¿Cuántos límites tiene una función en un determinado valor?, la respuesta a esta cuestión es importante ya que presenta el número de objetos que hay que encontrar, dicho resultado es el siguiente:

Teorema 2.1.2: Si el límite de una función existe, entonces es único.

Demostración: Se procede por contradicción. Supóngase que $f(x) \to L$ y que $f(x) \to M$, con $L \neq M$, cuando $x \to x_0$. Aplicando la definición de límite, para $\epsilon = \frac{|L-M|}{2} > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que:

$$|f(x) - L| < \frac{|L-M|}{2} \text{ , si } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \text{y} \quad |f(x) - M| < \frac{|L-M|}{2} \text{ , si } 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

Luego, hay que garantizar que las dos condiciones se cumplan simultáneamente, para ello hay que tomar el más pequeño entre δ_1 y δ_2, es decir, si $0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} |L-M| &= |L - M + (f(x) - f(x))| = |(L - f(x)) - (M - f(x))| \\ &\leq |f(x) - L| + |f(x) - M| < \frac{L-M}{2} + \frac{L-M}{2} \\ &= |L-M| \end{aligned}$$

Hay que observar tales elementos x existen ya $\delta_1, \delta_2 > 0$ y esto implica que $\delta > 0$. En consecuencia $|L-M| < |L-M|$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $L = M$.

Cabe mencionar que el teorema anterior parte de una hipótesis muy fuerte que es: **Si el límite de una función existe**, situación que hasta el momento se puede garantizar. Por tal motivo se presenta los límites de funciones que son muy útiles en el cálculo de los límites. El siguiente resultado relaciona el concepto de límite con el concepto de límites unilaterales.

Teorema 2.1.3. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existe si y sólo si los límites unilaterales de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 existen y son iguales.

Demostración: Supóngase que $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$, esto implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$, si $0 < |x - x_0| < \delta$. La expresión $0 < |x - x_0| < \delta$ es equivalente a $-\delta < x - x_0 < \delta$. Tomando la primera y la segunda desigualdad respectivamente se tiene que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - L| < \varepsilon \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta$$

Por lo tanto $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^-$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^+$. Por otra parte supóngase que $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^-$ y $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0^+$, para $\varepsilon > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta_1 \quad \text{y} \quad |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta_2$$

Tomando el valor más pequeño entre δ_1 y δ_2 se garantiza que se cumplen ambas condiciones, es decir,

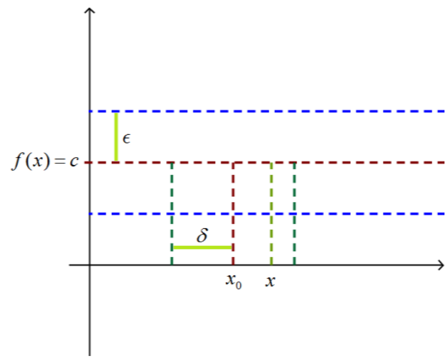
$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ si } 0 < x - x_0 < \delta \quad \text{y} \quad |f(x) - L| < \varepsilon, \text{ si } 0 < x_0 - x < \delta$$

Donde $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, además $0 < x - x_0 < \delta$ y $0 < x_0 - x < \delta$ implican que $-\delta < x - x_0 < \delta$ o equivalentemente $0 < |x - x_0| < \delta$. En consecuencia $|f(x) - L| < \varepsilon$, si $0 < |x - x_0| < \delta$, por lo tanto $f(x) \to L$ cuando $x \to x_0$. □

Ahora se presentan los valores que toman el límite de una función constante y la función identidad.

Lema 2.1.4. Dado $c \in \mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, el límite de una función constante es la misma constante.

Demostración: Dado que $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $0 = |f(x) - c| < \epsilon$, así que basta tomar cualquier valor $\delta > 0$. De manera gráfica se tiene lo siguiente:

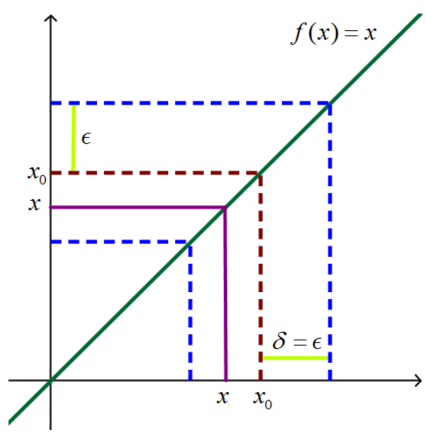


Límite de una función constante 1.

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.

Lema 2.1.5. Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Demostración: Se tiene que $f(x) = x$ y $L = x_0$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - L| = |x - x_0| < \epsilon$, basta tomar $\delta = \epsilon$, como se muestra en la siguiente gráfica:



Gráfica de una función 1.

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

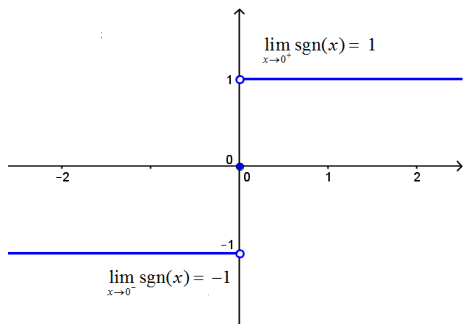
Ahora se presenta un ejemplo de una función que no tiene límite en un determinado valor ocupando los límites unilaterales.

Ejemplo: Se tiene que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ no existe, para ellos se utilizan los límites unilaterales.

Recordando que la función signo se define de la siguiente forma:

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Tomando el límite por la izquierda se tiene que $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$ por otra parte el límite por la derecha es $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1)=1$, gráficamente se tiene lo siguiente:



Función sin límites 1.

Como el límite por la derecha es distinto al límite por la izquierda, es decir $\lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)$, implica que $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}(x)$ no existe.

El siguiente resultado muestra la compatibilidad que existe entre el concepto de límite y las operaciones algebraicas de funciones.

Teorema 2.1.6. Supóngase que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ y que $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$ entonces se cumple lo siguiente:

(i). $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=L+M$.

(ii). $\lim\limits_{x\to x_0}(f-g)(x)=L-M$.

(iii). $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=L\cdot M$.

(iv). $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{L}{M}$, cuando $M\neq 0$.

Demostración: La idea de esta prueba consiste en aprovechar que los límite de f y g existen en x_0 lo que permite proponer cantidades $\epsilon > 0$ adecuadas para garantizar la existencia de $\delta > 0$ adecuados. Supóngase que $\epsilon > 0$, para (i) y (ii) hay que observar que para $\frac{e}{2} > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \text{ y } |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

Luego, hay que garantizar que las dos condiciones se cumplan simultáneamente, para ello hay que tomar el más pequeño entre δ_1 y δ_2, es decir, si $0 < |x - x_0| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, obsérvese que como $\delta_1, \delta_2 > 0$ implica que $\delta > 0$.

De lo anterior se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} |(f \pm g)(x) - (L \pm M)| &= |f(x) \pm g(x) - (L \pm M)| = |(f(x) - L) \pm (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = L \pm M$. Para (iii) hay que observar que se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\left|(f\cdot g)(x)-L\cdot M\right| &= \left|f(x)g(x)-LM\right| \\
&= \left|f(x)g(x)-LM+\left(f(x)M-f(x)M\right)+\left(g(x)L-g(x)L\right)+\left(LM-LM\right)\right| \\
&= \left|\left(f(x)g(x)-f(x)M-g(x)L+LM\right)+\left(f(x)M-LM\right)+\left(g(x)L-LM\right)\right| \\
&= \left|\left(f(x)-L\right)\left(g(x)-M\right)+M\left(f(x)-L\right)+L\left(g(x)-M\right)\right| \\
&= \left|\left(f(x)-L\right)\left(g(x)-M\right)\right|+\left|M\left(f(x)-L\right)\right|+\left|L\left(g(x)-M\right)\right| \\
&\leq \left|f(x)-L\right|\left|g(x)-M\right|+\left|M\right|\left|f(x)-L\right|+\left|L\right|\left|g(x)-M\right| \\
&< \left|f(x)-L\right|\left|g(x)-M\right|+\left(\left|M\right|+1\right)\left|f(x)-L\right|+\left(\left|L\right|+1\right)\left|g(x)-M\right|
\end{aligned}
$$

Como $f(x)\to L$ cuando $x\to x_0$, para los valores $1, \frac{\epsilon}{3\left(\left|M\right|+1\right)}>0$ existen $\delta_1,\delta_2>0$ tales que:

$$\left|f(x)-L\right|<1 \text{, si } 0<\left|x-x_0\right|<\delta_1 \text{ y } \left|f(x)-L\right|<\frac{\epsilon}{3\left(\left|M\right|+1\right)} \text{, si } 0<\left|x-x_0\right|<\delta_2.$$

De manera similar, como $g(x)\to M$ cuando $x\to x_0$, para los valores $\frac{\epsilon}{3}, \frac{\epsilon}{3\left(\left|L\right|+1\right)}>0$ existen $\delta_3,\delta_4>0$ tales que:

$$\left|g(x)-M\right|<\frac{\epsilon}{3} \text{, si } 0<\left|x-x_0\right|<\delta_3 \text{ y } \left|g(x)-M\right|<\frac{\epsilon}{3\left(\left|L\right|+1\right)} \text{, si } 0<\left|x-x_0\right|<\delta_4$$

Análogamente a (i) y (ii) para que se cumpla las 4 condiciones simultáneamente hay tomar el valor más pequeño entre $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ y δ_4, es decir, cuando $0<\left|x-x_0\right|<\delta$, donde $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}>0$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\left|f(x)-L\right|\left|g(x)-M\right| &< (1)\left(\frac{\epsilon}{3}\right)=\frac{\epsilon}{3} \\
\left(\left|M\right|+1\right)\left|f(x)-L\right| &< \left(\left|M\right|+1\right)\frac{\epsilon}{3\left(\left|M\right|+1\right)}=\frac{\epsilon}{3} \\
\left(\left|L\right|+1\right)\left|g(x)-M\right| &< \left(\left|L\right|+1\right)\frac{\epsilon}{3\left(\left|L\right|+1\right)}=\frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}
$$

En consecuencia

$$\left|(f\cdot g)(x)-L\cdot M\right| < \left|f(x)-L\right|\left|g(x)-M\right| + \left(\left|M\right|+1\right)\left|f(x)-L\right| + \left(\left|L\right|+1\right)\left|g(x)-M\right|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Por lo tanto $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=L\cdot M$. Finalmente, para (iv) hay que mostrar primero que $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{M}$ cuando $M\neq 0$. En efecto, hay que observar lo siguiente:

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\frac{1}{M}\right|=\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{M}\right|=\left|\frac{M-g(x)}{g(x)M}\right|=\frac{\left|g(x)-M\right|}{\left|g(x)\right|\left|M\right|}$$

Como $g(x)\to M$ cuando $x\to x_0$ para $\frac{|M|}{2}>0$ existe $\delta_1>0$ tal que

$$\left|g(x)-M\right|<\frac{|M|}{2}\text{, si } 0<\left|x-x_0\right|<\delta_1$$

Además $\frac{|M|}{2}>\left|g(x)-M\right|\geq\left|\left|M\right|-\left|g(x)\right|\right|$, de donde se obtiene que $\left|g(x)\right|>\left|M\right|-\frac{|M|}{2}=\frac{|M|}{2}$ en consecuencia $\frac{1}{\left|g(x)\right|}<\frac{2}{\left|M\right|}$. Por otro lado, para $\frac{\varepsilon\left|M\right|^2}{2}>0$ existe $\delta_2>0$ tal que:

$$\left|g(x)-M\right|<\frac{\varepsilon\left|M\right|^2}{2}\text{, si } 0<\left|x-x_0\right|<\delta_2$$

Tomando el valor mínimo entre δ_1 y δ_2 se garantizan las dos condiciones simultáneamente, es decir, cuando $0<\left|x-x_0\right|<\delta$ donde $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ se tiene lo siguiente:

$$\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\frac{1}{M}\right|=\frac{\left|g(x)-M\right|}{\left|g(x)\right|\left|M\right|}<\left(\frac{1}{\left|M\right|}\right)\left(\frac{2}{\left|M\right|}\right)\left(\frac{\varepsilon\left|M\right|^2}{2}\right)=\varepsilon$$

Lo que muestra que $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{M}$. Finalmente aplicando (iii) se obtiene lo que

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\lim_{x\to x_0}\left(f\times\frac{1}{g}\right)(x)=L\times\frac{1}{M}=\frac{L}{M}\ .\ \square$$

Como consecuencia inmediata del resultado anterior se tiene lo siguiente:

Corolario 2.1.7. Sean $f_1(x),\ldots,f_n(x)$ un conjunto de funciones tales que $f_1(x)\to L_1,\ldots f_n(x)\to L_n$ cuando $x\to x_0$ entonces:

(i). $\lim_{x\to x_0}\left(f_1+\cdots+f_n\right)(x)=L_1+\cdots+L_n$.

(ii). $\lim_{x\to x_0}\left(f_1\times\ldots\times f_n\right)(x)=L_1\times\ldots\times L_n$.

Demostración: La demostración es inmediata aplicando inducción matemática sobre el número n.

Aplicando el corolario anterior a la función identidad se obtiene lo siguiente:

Lema 2.1.8. Para todo $n\in\mathbb{N}$ y $x_0\in\mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{x\to x_0}x^n=x_0^n$.

Demostración: Se procede por inducción, para $n=1$ se tiene

$$\lim_{x\to x_0}x^1=\lim_{x\to x_0}x=x_0=x_0^1$$

Supóngase que para $n=k$ se tiene que $\lim_{x\to x_0}x^k=x_0^k$, tomando $n=k+1$ se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{x\to x_0}x^{k+1}=\lim_{x\to x_0}\left(x^k\cdot x\right)=\left(\lim_{x\to x_0}x^k\right)\left(\lim_{x\to x_0}x^1\right)=x_0^k\cdot x_0=x_0^{k+1}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to x_0}x^n=x_0^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Combinando el teorema y su corolario junto con los lemas previos se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.1.9. Sean $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales y $x_0\in\mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to x_0}p(x)=p(x_0)$.

Demostración: Sean $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ un polinomio con coeficientes reales y $x_0\in\mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}p(x)&=\lim_{x\to x_0}\left[a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\right]=\lim_{x\to x_0}a_0+\lim_{x\to x_0}a_1x+\ldots+\lim_{x\to x_0}a_nx^n\\&=a_0+\left(\lim_{x\to x_0}a_1\right)\left(\lim_{x\to x_0}x\right)+\cdots+\left(\lim_{x\to x_0}a_n\right)\left(\lim_{x\to x_0}x^n\right)\\&=a_0+a_1x_0+\ldots+a_nx_0^n=p(x_0)\end{aligned}$$

Aplicando el resultado anterior y la parte (iv) del teorema se tiene lo siguiente:

Proposición 2.1.10. Sean $h(x)$ una función racional y $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$, cuando $h(x_0)$ existe.

Demostración: Como $h(x)$ es una función racional, existen dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que $h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, como $h(x_0)$ existe implica que $q(x_0) \neq 0$. El resultado se obtiene de observar que $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = h(x_0)$.

Ejemplos:

- $\lim_{x \to 4} 5 = 5$.
- $\lim_{x \to -3} 4x^2 = 4(-3)^2 = 4(9) = 36$.
- $\lim_{x \to -2} (3x^2 - 5x + 6) = 3(2)^2 - 5(2) + 6 = 3(4) - 10 + 6 = 12 - 4 = 8$.
- $\lim_{x \to -1} \left[\frac{4x^3 - 6x^2 - 3x}{4x^2 - 24} \right] = \frac{\lim_{x \to -1} \left[4x^3 - 6x^2 - 3x \right]}{\lim_{x \to -1} \left[4x^2 - 24 \right]} = \frac{4(-1)^3 - 6(-1)^2 - 3(-1)}{4(-1)^2 - 24} = \frac{-7}{-20} = \frac{7}{20}$.

Ejercicio: Calcular $\lim_{x \to 1} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

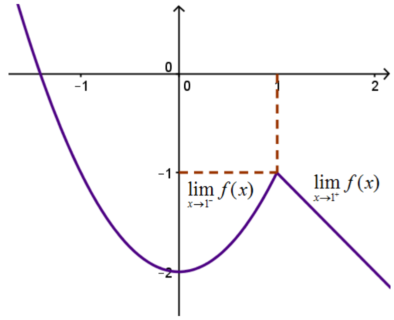
Solución: Se procede a través de límites unilaterales. Para para valores menores que 1 la regla de correspondencia de $f(x)$ es $x^2 - 2$, en consecuencia, el límite por la izquierda es:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 - 2 \right) = (1)^2 - 2 = -1.$$

De manera similar para valores mayores a 1 la regla de correspondencia de $f(x)$ es -1, en consecuencia, el límite por la derecha es:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x) = -(1) = -1.$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Grafica del límite de una función 1.

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$ se tiene que $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$.

Existen funciones cuyos límites no se pueden calcular por simple evaluación como los ejemplos anteriores, en algunos casos se requiere hacer un poco de artificios algebraicos.

Ejercicio: Calcular $\lim_{x\to 2}\left[\dfrac{6-5x+x^2}{x^2-4}\right]$

Solución: Este ejercicio pide calcular el límite de una función racional, el problema que presenta es en el denominador ya que $\lim_{x\to 2}\left[x^2-4\right]=(2)^2-4=4-4=0$ y en consecuencia el teorema sobre el límite de un cociente no se puede aplicar ya que no se cumple con su hipótesis.

Hay que observar que tanto el numerador como el denominador se puede factorizar, en consecuencia se tiene lo siguiente:

$$\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$$

El mismo concepto de límite dice que hay que tomar acercamiento, eso significa que $x \neq 2$ en consecuencia $x-2 \neq 0$ y la expresión anterior se reduce el siguiente modo:

$$\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}=\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{x-3}{x+2}$$

Por consiguiente

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}\right]=\lim_{x\to 2}\left[\frac{x-3}{x+2}\right]=\frac{\lim_{x\to 2}(x-3)}{\lim_{x\to 2}(x+2)}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to 2}\left[\frac{6-5x+x^2}{x^2-4}\right]=-\frac{1}{2}$.

Los siguientes ejemplos se resuelven de manera similar al ejercicio anterior.

Ejemplo:

- $\lim_{x\to 4}\frac{8-6x+x^2}{20-9x+x^2}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{(x-4)}(x-5)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x-5}=\frac{4-2}{4-5}=\frac{2}{-1}=-2$.
- $\lim_{x\to -1}\frac{-4-x+3x^2}{4+5x+x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(3x-4)}{\cancel{(x+1)}(x+4)}=\lim_{x\to -1}\frac{3x-4}{x+4}=\frac{3(-1)-4}{-1+4}=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3}$.
- $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{-1+x+6x^2}{-5-9x+2x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(2x+1)}(3x-1)}{\cancel{(2x+1)}(x-5)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{3x-1}{x-5}=\frac{3\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{-\frac{1}{2}-5}=\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{11}{2}}=\frac{5}{11}$

Cuando se requiere calcular límites al infinito, hay que utilizar la relación $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, esto se realizará factorizando la potencia de x que se presente tanto en el numerador como en el denominador, como se muestra en los siguientes ejercicios.

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x-2}$.

Solución: Se comienza factorizando x en ambas componentes de la función racional para obtener lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(3-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}.$$

Por lo tanto $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x-2}=\frac{1}{3}$.

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x+1}{-2x^3-x^2+5x}$.

Solución: Se comienza factorizando x^3 en ambas componentes de la función racional para obtener lo siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4x+1}{-2x^3-x^2+5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(-2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-2-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{1+0+0}{-2-0+0}=-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x+1}{-2x^3-x^2+5x} = -\dfrac{1}{2}$.

$\square$

Ahora se presenta la relación que existe entre el concepto de límite y la composición de funciones:

Teorema 2.1.11. Supóngase que $f(x)\to L$ cuando $x\to x_0$ y que $g(u)\to M$ cuando $u\to L$ entonces $(g\circ f)(x)\to M$ cuando $x\to x_0$.

Demostración: Como $g(u)\to M$ cuando $u\to L$, dado $\epsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que $|g(u)-M|<\epsilon$, si $0<|u-L|<\delta_1$. Por otro lado, como $f(x)\to L$ cuando $x\to x_0$, para $\delta_1>0$ existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-L|<\delta_1$, si $0<|x-x_0|<\delta$, entonces tomando los valores u tales que $u=f(x)$ y $0<|x-x_0|<\delta$, lo que implica que

$$|g(f(x))-M|<\epsilon, \text{ si } 0<|x-x_0|<\delta$$

Por lo tanto $(g\circ f)(x)\to M$ cuando $x\to x_0$.

El teorema anterior plantea que para calcular el límite de una composición de funciones es lo mismo componer las funciones y calcular el límite o calcular los límites de manera parcial, como lo muestra a continuación:

Ejemplo: Sean $f(x)=3x^2$, $g(x)=2x-1$ y $x_0=-1$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1} 3x^2=3(-1)^2=3$, en consecuencia $L=3$, luego $\lim\limits_{x\to L} g(x)=\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=2(3)-1=5$. Por otro lado, realizando la composición se tiene $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x^2)=2(3x^2)-1=6x^2-1$, finalmente se calcula $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x)=\lim\limits_{x\to -1}(6x^2-1)=6(-1)^2-1=5$, el teorema garantizaba que ambos resultados es el mismo.

Para finalizar se presenta un resultado que relaciona el límite con el orden que existe en los números reales.

Teorema 2.1.12. Supóngase que $f(x)\le g(x)$ para todos los valores suficientemente cercanos a x_0 si $f(x)\to L$ y $g(x)\to M$ cuando $x\to x_0$ entonces $L\le M$.

Demostración: Sea $\varphi(x)=g(x)-f(x)$ entonces $\varphi(x)\ge 0$ para todos los valores suficiente cercanos a x_0 y además $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(g(x)-f(x))=M-L$. Defínase $K=M-L$, para mostrar que $K\ge 0$ se procede por contradicción, es decir, supóngase que $K<0$ como

$\varphi(x) \to K$ cuando $x \to x_0$ para $\frac{|K|}{2} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x) - K| < \frac{|K|}{2}$, siempre y cuando $0 < |x - x_0| < \delta$. Observando que $|\varphi(x)| - K \leq |\varphi(x) - K| < \frac{|K|}{2}$ implica que $|\varphi(x)| < K + \frac{|K|}{2} = \frac{K}{2}$, en consecuencia $|\varphi(x)| < 0$ ya que $K < 0$, lo cual es una contradicción por consiguiente $K \geq 0$. Por lo tanto $M \geq L$.

$\square$

Teorema 2.1.13. Dadas tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tales que $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ para todos los valores suficientemente cercanos a x_0. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ entonces $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

Demostración: Como $f(x) \to L$ y $g(x) \to L$ cuando $x \to x_0$ y $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ para todos los valores suficientemente cercanos a x_0, se tiene que para $\epsilon > 0$ existen $\delta > 0$ tales que

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{4} \text{ y } |g(x) - L| < \frac{\epsilon}{4}, \text{ si } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Hay que observar lo siguiente:

$$0 \leq f(x) - g(x) = \big(f(x) - L\big) - \big(g(x) - L\big) \leq |f(x) - L| + |g(x) - L| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

Tomando

$$\begin{aligned} |L - h(x)| &= \left|\big(L - f(x)\big) + \big(f(x) - h(x)\big)\right| \leq |f(x) - L| + |f(x) - h(x)| \\ &= \frac{\epsilon}{4} + \big(f(x) - g(x)\big) < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.1.14. Para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se tiene que $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

Demostración: Se tiene que $0 \leq x^n \leq x$ para todo $0 < |x| < 1$, además $\lim_{x \to 0} 0 = 0$ y $\lim_{x \to 0} x = 0$ por el teorema anterior $\lim_{x \to 0} x^n = 0$.

Continuidad

La continuidad es una de las propiedades más importantes que tienen algunas funciones, la importancia que tiene esta propiedad es que a partir de ella se pueden garantizar otras propiedades.

Continuidad de funciones

En la sección anterior, muchos de los ejemplo de límites se calcularon evaluando ya sea en la función original o en reducciones de la misma, en general el límite de una función no siempre se puede calcular de esta manera, sin embargo hay una familia de funciones la cuales permiten calcular los límites evaluando. Esta sección comienza presentando la definición de una función continua.

Intuitivamente, la gráfica de una función continua se puede dibujar sin despegar el lápiz, es decir, es un trazo continuo esto significa que no presenta interrupciones, ni saltos ni mucho menos oscilaciones indefinidas. Pero definir un concepto a partir de la vista, puede ser engañoso, por consiguiente la definición formal de una función continua es la siguiente:

Definición 2.2.1. Se dice que una función $f(x)$ **es continua en** x_0 sí y sólo si

(i). La función $f(x)$ está definida en x_0.

(ii). $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe.

(iii). $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

En caso contrario, se dice que $f(x)$ **es discontinua en** x_0 si y sólo si $f(x)$ no es continua en x_0. Además se dice que $f(x)$ **es continua en un conjunto** S si y sólo si $f(x)$ es continua en x para todo $x \in S$.

Hay que observar que el concepto de continuidad es un local, esto quiere decir, depende del punto donde se esté trabajando.

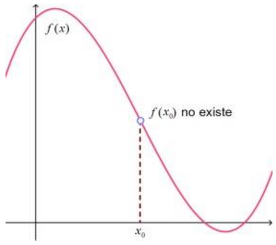
A partir de (iii) la definición de continuidad se escribe de manera equivalente: la función $f(x)$ es continua en x_0 sí y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, si $|x - x_0| < \delta$.

Ejemplo: Cualquier polinomio $p(x)$ es una función continua para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ ya que $\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: El polinomio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ es continua en $\mathbb{R}$.

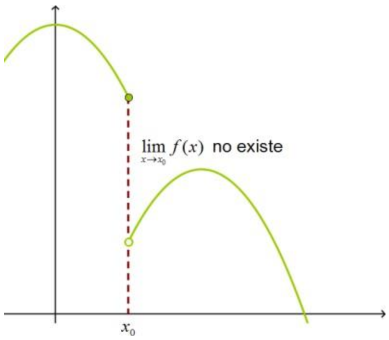
Cuando $f(x)$ es discontinua en x_0 significa que al menos una de las condiciones de la definición de continuidad no se cumple, de manera más clara se tiene que:

(a) Que $f(x)$ no existe esté definida en x_0.



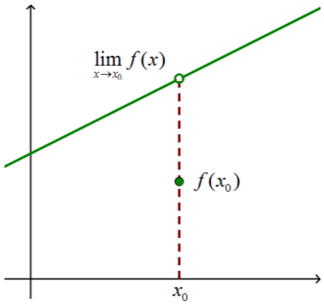
Polinomio continua en R 1.

(b) Que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no exista.



Polinomio continua en R 2.

(c) Qué $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.



Polinomio continua en R 3

Ejemplo: Dada una función racional $h(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ es continua en todos los valores x_0 tales que $q(x_0)\neq 0$.

Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^2-5x+6}$ es continua salvo los valores que satisfacen $x^2-5x+6=0$, equivalentemente se tiene que $(x-2)(x-3)=0$, por consiguiente $x=2$ y $x=3$. Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$.

Ejemplo: La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^3+x^2-20x}$ es continua salvo los valores que satisfacen $x^3+x^2-20x=0$, equivalentemente se tiene que $x(x+5)(x-4)=0$, por consiguiente $x=0$, $x=-5$ y $x=4$. Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-5,0,4\}$.

Ahora se presenta dos ejemplos de cómo estudiar la continuidad de una función definida por secciones.

Ejercicio: Dada la función $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{si } x\leq 4\\ 3x+a & \text{si } x>4\end{cases}$ hallar el valor de a para que $f(x)$ sea continua en $x_0=4$.

Solución: Dado que $f(x)=-x^2$ para $x\leq 4$ entonces $f(4)=-(4)^2=-16$, es decir, se cumple la condición (i) de la definición. Para la condición (ii) se toman los límites unilaterales, de donde se obtiene que:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(-x^2\right)=-(4)^2=-16 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(3x+a)=3(4)+a=12+a$$

Como $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ tiene que existir, implica que:

$$-16=\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=12+a$$

Por consiguiente $a=-16-12=-28$.

$\square$.

Ejercicio: Dada la función $f(x)=\begin{cases}-2x^2+4 & \text{si } x\leq 1\\ 3x & \text{si } x>1\end{cases}$ estudiar su continuidad.

Solución: Dado que $f(x)$ es una función por secciones donde cada sección es un polinomio definido sobre intervalos, solo basta estudiar cuando $x_0=1$, dado que $1\leq 1$ se tiene que $f(1)=-2(1)^2+4=2$. Tomando límites unilaterales se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-2x^2+4\right)=-2(1)^2+4=2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x)=3(1)=3$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ entonces $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe, es decir, la función $f(x)$ es discontinua en $x_0 = 1$. Por lo tanto $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Propiedades de la continuidad

En esta sección se presenta algunas propiedades de las funciones continuas, se comienza presentando la relación entre las funciones continuas y las operaciones algebraicas de funciones.

Teorema 2.2.2. Supóngase que $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0 entonces:

(i). $(f+g)(x)$ es continua en x_0.

(ii). $(f-g)(x)$ es continua en x_0.

(iii). $(f \cdot g)(x)$ es continua en x_0.

(iv). $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en x_0, sí $g(x_0) \neq 0$.

Demostración: Como $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0 se tiene que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to x_0} g(x_0) = g(x_0).$$

Para (i) y (ii) se tiene que

$$\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = f(x_0) \pm g(x_0) = (f \pm g)(x_0)$$

Para (iii) se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$$

Finalmente para (iv) cómo $g(x_0) \neq 0$ se tiene lo siguiente:

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

Con lo anterior queda demostrado el teorema.

Ahora se presenta la relación que hay entre el concepto de continuidad y la composición de funciones:

Teorema 2.2.3. Supóngase que $f(x)$ es continua en x_0 y que $g(x)$ es continua en $f(x_0)$ entonces $(g \circ f)(x)$ es continua en x_0.

Demostración: Para mostrar este resultado se utiliza la relación que hay entre el límite de una función y la composición de funciones. Como $f(x)$ es continua en x_0 implica que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ y como que $g(x)$ es continua en $f(x_0)$ implica que $\lim_{u\to f(x_0)} g(u) = g\left(f(x_0)\right)$ se tiene que

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = g\left(f(x_0)\right) = (g\circ f)(x_0).$$

Por lo tanto $(g\circ f)(x)$ es continua en x_0.

$\square$

Ejemplo: La función $h(x) = 2\left(x^2+5\right)^3$ es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que $h(x)$ es la composición de las funciones $f(x) = x^2+5$ y la función $g(x) = 2x^3$.

Cuando $f(x)$ está definida en un intervalo abierto (a,b), hay que recordar que $f(x)$ **es continua en** (a,b) sí y sólo si $f(x)$ es continua en x para todo $x\in(a,b)$. Cuando se tiene un intervalo cerrado $[a,b]$ se dice que $f(x)$ **es continua en** $[a,b]$ si y sólo si $f(x)$ es continua (a,b), $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.
El siguiente resultado presenta como hipótesis la continuidad de la función un punto sin embargo la conclusión muestra el comportamiento de la función un intervalo que contiene a dicho punto.

Proposición 2.2.4. Supóngase que $f(x)$ es continua en x_0 si $f(x_0) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x que satisface $|x - x_0| < \delta$ implica que $f(x) > 0$.

Demostración: Dado que $f(x)$ es continua en x_0 entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, si $|x - x_0| < \delta$, en particular cuando $\varepsilon = f(x_0) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$, si $|x - x_0| < \delta$. Lo que implica que $f(x) > 0$.

$\square$

Como consecuencia inmediata de la proposición anterior se tiene lo siguiente:

Corolario 2.2.5. Supóngase que $f(x)$ es continua en x_0 si $f(x_0) < 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x que satisface $|x - x_0| < \delta$ implica que $f(x) < 0$.

Demostración: Basta observar que la función $-f(x)$ satisface las hipótesis de la proposición anterior.

□

Los siguientes resultados presentan algunas propiedades que tienen las funciones continuas definidas sobre intervalos cerrados, esto requiere la utilización del axioma de completes de los números reales.

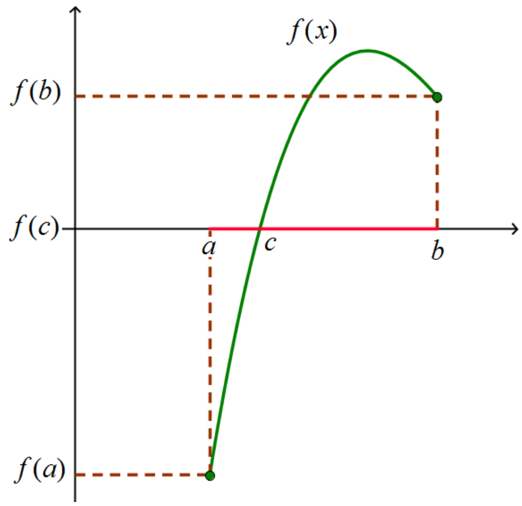
Teorema 2.2.6. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, si $f(a)<0$ y $f(b)>0$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Demostración: Sea $A=\{x\in[a,b] \mid f(y)<0 \text{ para todo } y\in[a,x]\}$, dado que $f(a)<0$, por el Corolario 2.2.5 implica que existe $\delta>0$ tal que $f(x)<0$ para cada x que satisface $x-a<\delta$, esto garantiza que $A\neq\varnothing$. De manera similar, como $f(b)>0$ por la Proposición 2.2.4 existe $\delta>0$ tal que $f(x)>0$ para todo x que satisface $b-x<\delta$, por consiguiente A no vacío es un conjunto acotado superiormente, por el axioma de completes existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $c=\sup(A)$.

Ahora se mostrará que $f(c)=0$, para ello se procede por contradicción, supóngase que $f(c)<0$ por el Corolario 2.2.5 existe $\delta>0$ tal que $f(x)<0$ para todo x que satisface $|x-c|<\delta$, equivalentemente $c-\delta<x<\delta+c$, así tomando $c<y<c+\delta$ se tiene que $f(y)<0$ lo que contradice el hecho de que $c=\sup(A)$. De manera análoga, supóngase que $f(c)>0$ por la Proposición 2.2.4 existe $\delta>0$ tal que $f(x)>0$ para todo x que satisface $|x-c|<\delta$, equivalentemente $c-\delta<x<\delta+c$, así tomando $c-\delta<y<c$ se tiene que $f(y)>0$ lo que contradice el hecho de que $c=\sup(A)$. Por lo tanto $f(c)=0$.

□

De forma gráfica el teorema anterior se presenta de la siguiente forma:



Gráfica teorema 2.2.6 1.

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior se tienen los siguientes resultados:

Corolario 2.2.7. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, si $f(a)>0$ y $f(b)<0$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Demostración: Se obtiene de aplicar al teorema anterior a la función $-f(x)$.

Corolario 2.2.8. Supóngase que $f(x)$ es continua en $[a,b]$, si $f(a)<y<f(b)$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=y$.

Demostración: Se obtiene de aplicar al teorema anterior a la función $h(x)=f(x)-y$, en efecto como $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces $h(x)=f(x)-y$ es continua en $[a,b]$, además $h(a)=f(x)-y<0$ y $h(b)=f(b)-y>0$ por el Teorema 2.2.6 existe $c\in(a,b)$ tal que $h(c)=0$, es decir $f(c)=y$.

$\sqcup$

Antes de presentar el siguiente teorema, se comienza con el siguiente concepto, se dice que una función $f(x)$ **es acotada en un conjunto** S si y solo si existe $M>0$ tal que $|f(x)|\le M$ para todo $x\in S$.

Lema 2.2.8. Si $f(x)$ es continua en x_0 entonces existe un $\delta>0$ tal que $f(x)$ es continua en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

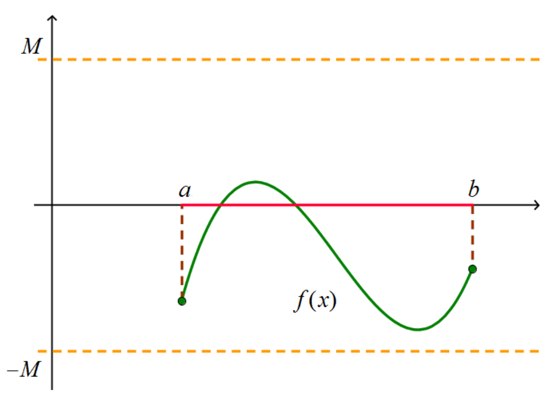
Demostración: Por la definición de continuidad, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ sí $|x - x_0| < \delta$. Observando que $|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ implica $|f(x)| < \varepsilon + |f(x_0)|$. El resultado se obtiene tomando $M = \varepsilon + |f(x_0)|$. $\square$

Ahora se presenta el siguiente resultado:

Teorema 2.2.9. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración: Sea $A = \{x \in [a,b] | f(x)$ es acotada en $[a, x]\}$, se tiene que $A \neq \emptyset$ ya que $a \in A$, además b acota al conjunto A, por el axioma de completitud existe $\alpha = \sup(A)$. El resto de la prueba es mostrar que $b = \alpha$, para ello se procede por contradicción, supóngase que $\alpha < b$. Como $f(x)$ es continua en α entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ es acotada en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, así que α es cota superior de A entonces dado x_0 tal que $\alpha - \delta < x_0 < \alpha$ se tiene que $f(x)$ es acotada en $[a, x_0]$. Ahora tomando x_1 tal $\alpha < x_1 < \alpha + \delta$ entonces $f(x)$ también es acotada en $[x_0, x_1]$, lo que contradice el hecho de que $\alpha = \sup(A)$. Así $b = \sup(A)$, esto solo muestra que la función $f(x)$ es acotada en $[a, x]$ para todo $x < b$, para incluir a b basta observar que como $f(x)$ es continua en b existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ es acotada en $(b - \delta, b]$, tomando $b - \delta < x_0 < b$ implica que $f(x)$ es acotada en $[a, x_0]$ y además $f(x)$ es acotada en $[x_0, b]$. Por lo tanto $f(x)$ es acotada en $[a,b]$.

De forma gráfica el teorema anterior se ilustra de la siguiente forma:



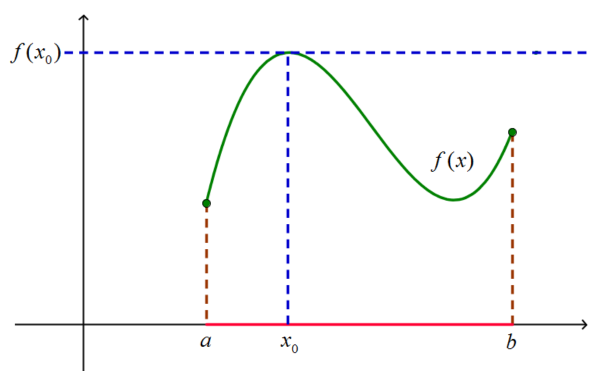
Gráfica teorema 2.2.9.

Finalmente se presenta el siguiente resultado que garantiza que una función continua definida sobre un intervalo cerrado alcanza un punto más alto.

Teorema 2.2.10. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x) \le f(x_0)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración: Se tiene que $f(x)$ es acotada, sea $A = \{ f(x) \mid x \in [a,b] \}$ es un conjunto no vació y acotado. Por el axioma de completes existe $\alpha = \sup(A)$. Para demostrar que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = \alpha$ se procede por contradicción, supóngase que $f(x) \neq \alpha$ y defínase la función $g(x) = \dfrac{1}{f(x) - \alpha}$ para cada $x \in [a,b]$, se tiene que $g(x)$ es continua en $[a,b]$, como $\alpha = \sup(A)$ implica que para todo ò > 0 existe $x \in [a,b]$ tal que $\alpha - f(x) <$ ò, estos es equivalente a que $\dfrac{1}{g(x)} <$ ò, cuando $x \in [a,b]$. Por consiguiente $g(x) > \dfrac{1}{\text{ò}}$ cuando $x \in [a,b]$, es decir, $g(x)$ no es acotado, lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = \alpha$.

De manera gráfica se tiene lo siguiente:



Gráfica teorema 2.2.10.

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.2.11. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x) \ge f(x_0)$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración: Se aplica el teorema anterior a la función $-f(x)$.

Cierre de la unidad

En esta unidad se presentó el concepto de límite. A partir de este, se demostró que cuando existe es único, se estudiaron sus relaciones con las operaciones de funciones, así como también los límites unilaterales y su relación con el límite. Después se presentó el concepto de continuidad de funciones y algunas de las propiedades que se desprenden de este.

Para saber más

Para profundizar sobre la continuidad de funciones y sus propiedades se puede consultar el siguiente sitio. Te recomiendo revisar estás páginas, trata sobre los espacios métricos topológicos, que dentro del área de cálculo diferencial y otras asignaturas te serán de utilidad.

- http://www.personal.psu.edu/jxr57/527-FA10/527F10-notes.pdf

Fuentes de consulta

- Apostol, T. (1990). *Calculus, (Vol. 1)*. Massachusetts Reverté.
- Lang, S. (1986). *A First Course in Calculus. (5a edition)*. N. Y. Springer.
- Larson, R. (2010). *Calculo de una variable*. (9ª Edición). México. Mc Graw Hill.
- Spivak, M. (2008). *Calculus. (4ª edición)*, México. Reverté
- Stewart, J. B. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y contexto. (4ª edición)*. México Cengage Learning.
- Zill, D. (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas. (4ª edición)*. México. Mc Graw Hill.