UnADM

UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Programa de la asignatura:

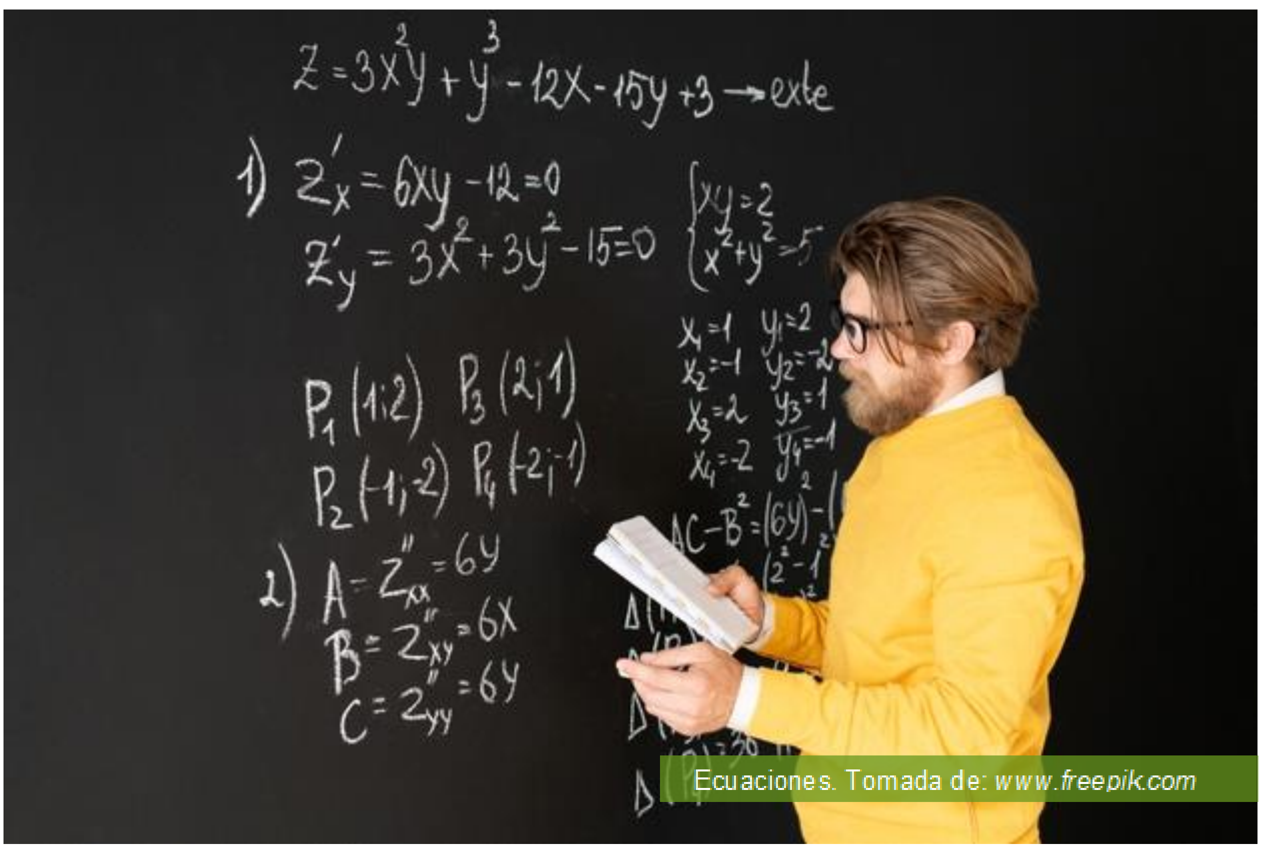
Ecuaciones diferenciales

U2 Ecuaciones diferenciales de segundo orden

DCSBA

TECNOLOGÍA AMBIENTAL

Unidad 2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden



Ecuaciones. Tomada de: www.freepik.com

Índice

Presentación de la Unidad 3
Propósitos de la unidad 4
Competencia específica....................5
Actividades 5
2.1. Propiedades....................6
2.1.1. Definición y elementos de una ecuación diferencial de segundo orden....................7
2.1.2. Problemas de valor inicial 8
2.2. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas 10
2.2.1. Definición de la homogeneidad y no homogeneidad en ecuaciones diferenciales.14
2.2.2. Dependencia e independencia lineal 15
2.2.3. Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas en fenómenos físicos 18
2.2.4. Ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden dos 23
2.2.5. Solución por superposición....................28
2.2.6. Solución por coeficientes indeterminados....................30
2.2.7. Solución por el método de operador anulador 43
Cierre de la Unidad....................57
Fuentes de consulta 58

Presentación de la Unidad

En esta segunda unidad se abordan los conceptos base para la comprensión y resolución de fenómenos que involucran ecuaciones diferenciales de segundo orden y superiores.

Partiendo de los conocimientos y competencias de la primera unidad, se identifican las propiedades de estos sistemas de orden superior, definiéndolos y estableciendo los elementos de interés para facilitar su solución, y al igual que en la unidad anterior serán abordados por medio de problemas que incluyen condiciones iniciales. Las diferentes secciones que abordarás permitirán que profundices en características como la homogeneidad o carencia de ésta en las ecuaciones diferenciales, linealidad, dependencia e independencia lineal. Para aplicar los conceptos tratados se verán diferentes técnicas de solución en las ecuaciones objeto de esta unidad, incluyendo la manera en que se presentan en fenómenos físicos, apoyándote en materiales existentes en libros de diversos autores.

El objetivo de lo anterior es proporcionar las herramientas necesarias para poder modelar de forma matemática sistemas cambiantes en el tiempo de segundo orden, facilitando de esta manera su aplicación en el desarrollo, análisis, operación y control de sistemas de energía renovable.

Propósitos de la unidad

El propósito de la unidad es utilizar los conceptos básicos que se emplean durante el análisis y solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden, incluyendo los elementos para su reconocimiento y clasificación, estableciendo si un fenómeno físico puede representarse por medio de estas y resolviendo problemas asociados.

Competencia específica

Aplica ecuaciones diferenciales de segundo orden para modelar matemáticamente fenómenos físicos encontrados en sistemas de energías renovables, por medio de métodos como el de superposición, coeficientes indeterminados y operador anulador.

Actividades

Las instrucciones de las actividades de aprendizaje, las podrás consultar en el espacio de *Avisos importantes*, toma en cuenta que para esta unidad se han generado actividades colaborativas, individuales, complementarias, autorreflexiones y la evidencia de aprendizaje.

2.1. Propiedades

Las ecuaciones diferenciales, como ya has visto en la primera unidad de la asignatura, sirven para modelar fenómenos físicos cambiantes en el tiempo, facilitando de esta manera el establecer elementos para su medición, entendimiento y control dentro de sistemas de energías renovables.

Estudiaste ya los fenómenos representables con ecuaciones de primer orden, pero limitarte a ello dejaría fuera una enorme cantidad de situaciones que se presentan día con día en tu campo de estudio. Es por ello que en este capítulo revisarás la manera en que se hace uso de ecuaciones diferenciales de orden superior, especialmente las de segundo orden.

Para lograrlo, identifica primero la forma general para las de orden n y luego, a partir de ella, lo harás de manera particular para las de orden dos.

Las ecuaciones diferenciales de orden n lineales tienen la siguiente forma (Cornejo, M. C., Villalobos, E. B., Quintana, P. A., 2008):

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Esta forma será utilizada a lo largo de toda la unidad, por lo que se hará referencia a ella, en algunas ocasiones, tan sólo mencionando su número. **(1)**

2.1.1. Definición y elementos de una ecuación diferencial de segundo orden

Si se toma la forma de las ecuaciones diferenciales lineales de orden n y haces $n = 2$, para identificar los elementos de las de segundo orden, se tiene

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

En esta forma puedes observar como elementos de la ecuación diferencial de segundo orden las funciones $a_2(x)$, $a_1(x)$, y $a_0(x)$, acompañadas de las diferenciales de 2º y 1er orden para a_2 y a_1 respectivamente, complementando la forma la variable dependiente y, acompañando a la función a_0. Del otro lado de la ecuación se tiene una función $f(x)$.

Por ejemplo, la ecuación

$$2x^2y" + \frac{4}{2}xy' + \frac{8}{4}y = 2e^x \cos x$$

En esta se puede apreciar que la n es 2, por lo que sabes que es una ecuación de segundo orden. Las funciones $a_2(x)$, $a_1(x)$, y $a_0(x)$ se encuentran definidas de la siguiente manera:

$$a_2(x) = 2x^2, \qquad a_1(x) = \frac{4}{2}x, \qquad a_0(x) = \frac{8}{4}$$

$f(x)$ es 2 $e^x cosx$, y tienes, para finalizar, que $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$ y $\frac{dy}{dx} = y'$.

2.1.2. Problemas de valor inicial

Los problemas con valor inicial para las ecuaciones diferenciales de segundo orden son similares a aquellos vistos en las de primer orden. Para un problema encontrado se observan ciertas condiciones iniciales que permiten obtener la solución, una vez clasificada la ecuación diferencial para utilizar la solución general de su tipo y encontradas las constantes que la resuelven.
Se retoma la ecuación **(1)** vista con anterioridad

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Cornejo *et al* (2008) mencionan que ésta ecuación podría estar sujeta a ciertas condiciones iniciales, por ejemplo

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ y''(x_0) &= y_0'' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad \mathbf{(2)}$$

siendo $y'_0, y''_0 \ldots, y_0^{(n-1)}$ constantes arbitrarias, y ponen un ejemplo con la siguiente ecuación diferencial de segundo orden.

Sea

$$y'' - 2y' + y = x^2 - 4x - 4$$

en donde se conocen los valores iniciales para $y(x)$ y $y'(x)$

$$y\,(0) = 1$$

$$y'(0) = 0$$

La solución general de la ecuación anterior es

$$y_g = c_1 e^x + c_2 x e^x + x^2 + 2 \;*$$

* En esta se profundizará en los siguientes temas.

Si sustituyes las condiciones iniciales en la solución general se tiene

$$1 = c_1 e^0 + c_2(0)e^0 + (0)^2 + 2$$

o lo que es lo mismo

$$1 = c_1 + 2$$

Despejando

$$c_1 = -1$$

Con eso se obtiene la primera constante c_1.

Para la segunda, se deriva la solución general, resultando

$$y' = c_1 e^x + c_2(xe^x + e^x) + 2x$$

Sustituyendo los valores iniciales

$$0 = c_1 e^0 + c_2(0e^0 + e^0) + 2(0)$$

$$0 = c_1 + c_2(0 + 1) + 0$$

$$0 = c_1 + c_2$$

$$c_2 = -c_1$$

Como ya se tiene c_1 lo sustituyes

$$c_2 = -(-1)$$

$$c_2 = 1$$

Recordando la solución general dada en un inicio

$$y_g = c_1 e^x + c_2 xe^x + x^2 + 2$$

Sustituyendo las constantes obtenidas se llega a la solución de la ecuación del ejemplo

$$y = -e^x + xe^x + x^2 + 2$$

Para garantizar la existencia y unicidad de una solución para un problema de valores iniciales para ecuaciones de orden n **(1)** que está sujeta a las condiciones en **(2)** se tiene el siguiente teorema:

Según Cornejo *et al* (2008, p. 70), si (x), $a_{n-1}(x),\ldots$, $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $f(x)$ son continuas en un intervalo J y $a_n(x) \neq 0$ para toda x en el intervalo, si $x = x_0$ es cualquier punto en él, entonces existe una única solución $y(x)$ en el intervalo del problema de valores iniciales dado por

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^x}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{x-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{x-2}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

2.2. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas

Para poder resolver las ecuaciones diferenciales se debe ser capaces de identificarlas y clasificarlas, ya que dependiendo de ello se podrá seleccionar la mejor forma de hacerlo.

Una de las primeras formas de hacerlo es por su linealidad: las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse en lineales o no lineales.

Una ecuación diferencial **lineal** puede reconocerse por la forma de la ecuación **(1),** ya descrita en el tema 2.1 de esta unidad:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^x}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{x-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{x-2}}+\ldots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

sujeta a las condiciones iniciales **(2)** descritas en el 2.1.2.

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y' \\ y''(x_0) &= y'' \\ &\vdots \\ y^{n-1}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

siendo $y_0,\ y´_0,\ y´´_0,\ldots,y_0^{(n-1)}$ constantes arbitrarias.

Para obtener la forma general de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden se hace $n=2$, resultando lo establecido en el subtema 2.1.1.

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=f(x)$$

Con $y(x_0)=y_0$ y $y'(x_0)=y'_0$

Reescribiendo la ecuación para facilitar su lectura, se tiene

$$a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x)$$

y si se divide todo entre a_2

$$y''+\frac{a_1}{a_2}y'+\frac{a_0}{a_2}y=\frac{f(x)}{a_2}$$

Como a_2, a_1 y a_0 son funciones de x la ecuación anterior puede ser reescrita de nuevo para tener una forma simplificada.

$$y''+g(x)y'+h(x)y=r(x) \qquad \textbf{(3)}$$

Ésta es la forma general para las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales

a) $y''+4x^2y'+2x^2y=3$

b) $y''+xy'+6x^3y=0$

c) $2x^2y''+6x^4y'+2x^3y=8x^2$

El último ejemplo, "c)", corresponde también a una ecuación diferencial lineal, ya que puede trabajarse para ser mostrada en la forma general **(3)**:

$$2x^2y'' + 6x^4y' + 2x^3y = 8x^2$$

$$\frac{2x^2y''}{2x^2} + \frac{6x^4y'}{2x^2} + \frac{2x^3y}{2x^2} = \frac{8x^2}{2x^2}$$

$$y'' + 3x^2y' + xy = 4$$

De esta manera se observa de una forma más clara su pertenencia a la clasificación mencionada.

Una ecuación diferencial **no lineal** puede identificarse por no poder presentarse en la forma **(3)**.

A continuación, se encuentran ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales:

a) $y'' + g(x)yy' + h(x)y = r(x)$

b) $y'' + g(x)yy' + h(x)y = 0$

c) $yy'' + g(x)y' + h(x)y = r(x)$

d) $y'' + g(x)y' + h(x)y = r(x)y$

Se le conoce como **solución de una ecuación diferencial** (independientemente de que sea lineal o no lineal) a la función $y = f(x)$ si se encuentra definida y es derivable n cantidad de veces en un intervalo, tal que al ser sustituida en la ecuación con todo y sus derivadas sea obtenida una identidad (Carmona & Filio, 2011). Para ejemplificar lo anterior, se presenta lo siguiente:

Se tiene la ecuación diferencial

$$y'' - y = 0$$

de la cual son soluciones para toda x las siguientes funciones

1) $y = e^x$

2) $y = e^{-x}$

Comprobación de solución 1

Derivando $y = e^x$ para obtener y'' y poder sustituir en la ecuación original

$$y = e^x$$

$$y' = e^x$$

$$y'' = e^x$$

Si se sustituye se observa que se cumple la igualdad y que efectivamente es solución de la ecuación

$$y'' - y = 0$$

$$e^x - e^x = 0$$

Comprobación de solución 2

Derivando $y = e^{-x}$ para obtener y'' y poder sustituir en la ecuación original

$$y = e^{-x}$$

$$y' = e^{-x}$$

$$y'' = e^{-x}$$

Si se sustituye se observa que se cumple la igualdad y que efectivamente es solución de la ecuación

$$y'' - y = 0$$

$$e^{-x} - e^{-x} = 0$$

De esta manera puedes observar que ambas funciones son realmente soluciones de la ecuación.

Una vez identificado si las ecuaciones son lineales o no lineales pueden también clasificarse por su homogeneidad.

2.2.1. Definición de la homogeneidad y no homogeneidad en ecuaciones diferenciales

Retomando la forma **(1)** de las ecuaciones diferenciales de orden n del tema 2.1.

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Si $f(x)$ es igual a cero, se dice que la ecuación diferencial lineal es homogénea. Caso contrario, si $f(x)$ es diferente de cero, la ecuación diferencial lineal es no homogénea (Cornejo *et al*, 2008).

Para las ecuaciones diferenciales de segundo orden tendrías entonces que una homogénea presentaría la forma

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

y una no homogénea

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

en donde $f(x) \neq 0$.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

a) $x^3y''' + \frac{2}{3}x^2y'' = 0$

b) $2x^2y'' + \frac{4}{2}xy' + \frac{8}{4}y = 0$

c) $x^4y''' + \frac{1}{2}xy = 0$

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas:

a) $x^3y''' + \frac{2}{3}x^2y'' = x\ln x$

b) $2x^2y'' + \frac{4}{2}xy' = 2\,senx\,cosx$

c) $x^4y'''' + \frac{1}{2}xy = e^{-2x}$

El siguiente es un ejemplo de una ecuación diferencial no lineal:

$$2x^2y'' + \frac{4}{2}xyy' + \frac{8}{4}y = e^{-2x}$$

Esto se debe a que $a_1(x)$ no es función únicamente de x, al encontrar en ella a la variable dependiente y.

Otra característica importante de identificar es la dependencia o independencia lineal entre funciones, ya que permitirá tener un mayor conocimiento de la forma de resolver ecuaciones diferenciales de orden superior que las contengan.

2.2.2. Dependencia e independencia lineal

De acuerdo a Carmona & Filio (2011) se dice que dos funciones tienen **dependencia lineal** si son proporcionales en un intervalo abierto en el que se encuentran definidas.

En otras palabras, si se tiene una función $y_1(x)$ y una función $y_2(x)$ se puede decir que son linealmente dependientes si $y_1 = k_1\ y_2$ o $y_2 = k_2\ y_1$ en donde las constantes de proporcionalidad k son diferentes de cero.

Una consecuencia es que si se divide y_1 entre y_2 el resultado será una constante para aquellas funciones con dependencia lineal.

Los siguientes son ejemplos de funciones linealmente dependientes:

a) $y_1 = 6e^{5x}$ y $y_2 = 2\ e^{5x}$, ya que si se divide y_1/y_2 da 3, que es una constante diferente de cero.

b) $y_1 = 5x^2$ y $y_2 = x^2$, porque si se divide y_1/y_2 resulta 5, que es una constante diferente de cero.

Caso contrario, $y_1(x)$ y $y_2(x)$ tienen **independencia lineal** en el intervalo si no son proporcionales en este. Si al dividir y_1 entre y_2 el resultado depende de x, entonces las funciones tienen independencia lineal.

Los siguientes son ejemplos de funciones linealmente independientes:

a) $y_1 = \text{sen}2x$ y $y_2 = \cos 2x$. Si se divide y_1/y_2 resulta $\text{sen}2x/\cos 2x$, que es un resultado dependiente de x que no es una constante de proporcionalidad, aún con el uso de identidades trigonométricas.

b) $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$, donde sí se divide y_1/y_2 da un resultado dependiente de x que no es una constante de proporcionalidad (e^{2x}).

Tienen dependencia lineal en el intervalo las funciones de un conjunto $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_n(x)$ si cuando menos una puede ser expresada como una combinación lineal de las otras. Si no es así, existe independencia lineal en las funciones, denotada porque ninguna función es combinación lineal del resto (Rainville & Bedient, 1998, p. 102).

Ejemplo de un conjunto de ecuaciones linealmente dependiente (Cornejo *et al*, 2008, p. 75):

$y_1 = x$, $y_2 = 2+\sqrt{x}$, $y_3 = -x^2$ y $y_4 = 4 + 2\sqrt{x} - x^2$ tienen dependencia lineal, ya que y_4 es una combinación lineal de las otras funciones, como se puede observar

$$y_4 = 0\,y_1 + 2\,y_2 + y_3$$

$$y_4 = 2\,(2+\sqrt{x}\,) + (-x^2)$$

$$y_4 = 4 + 2\sqrt{x} - x^2$$

Una de las formas para determinar si un conjunto de ecuaciones es linealmente independiente es el Wronskiano, que permite obtener una condición idónea dentro de un intervalo.

Para poder utilizarlo, se debe suponer que cada función se puede diferenciar cuando menos $(n\text{-}1)$ veces dentro del intervalo establecido.

De acuerdo a Rainville y Bedient (1998), dada la condición de dependencia lineal que establece que las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$,... y_n con constantes k_1, k_2, k_3,... k_n, (en donde algunas k son diferentes de cero) son linealmente dependientes en un intervalo dado $a \leq x \leq b$ tal que para toda x en el intervalo

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + k_3 y_3(x) + \ldots + k_n y_n(x) = 0,$$

Se puede deducir por diferenciación sucesiva que

$$k_1 y'_1 + k_2 y'_2 + k_3 y'_3 + \dots + k_n y'_n = 0$$

$$k_1 y''_1 + k_2 y''_2 + k_3 y''_3 + \dots + k_n y''_n = 0$$

$$\vdots$$

$$k_1 y_1^{(n-1)} + k_2 y_2^{(n-1)} + k_3 y_3^{(n-1)} + \cdots + k_n y_n^{(n-1)} = 0$$

Para los valores fijos de x dentro del intervalo dado, la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones lineales en las constantes se establecerá por el valor del determinante. A este se le conoce como el Wronskiano de las funciones.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Si el Wronskiano es diferente de cero para alguna x en el intervalo, se deduce que las constantes son iguales a cero, por lo que las funciones son linealmente independientes en el intervalo. Sin embargo, el recíproco del enunciado no es verdadero, ya que, si el Wronskiano es igual a cero, no necesariamente las funciones serán linealmente dependientes, pudiera darse el caso en que el Wronskiano sea cero y las funciones tengan independencia lineal en el intervalo dado.

Ejemplo de conjunto de funciones linealmente independientes calculado con el Wronskiano (Cornejo *et al*, 2008):

$y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ y $y_3 = \operatorname{sen} x$ son soluciones de $y''' - y'' - 1 = 0$, y son un conjunto de funciones con independencia lineal.

Esto lo sabrás al calcular el Wronskiano. Al ser tres funciones, el Wronskiano se define de la siguiente forma

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

Sustituyendo $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$ y $y_3 = \text{sen}\ x$ se tiene

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & cosx & senx \\ 0 & -senx & cos \\ 0 & -cosx & -senx \end{vmatrix} = 1(sen^2x + cos^2x) = 1$$

Como $(y_1,\ y_2,\ y_3) = 1$ y $1 \neq 0$ se comprueba que el conjunto de funciones dadas tiene independencia lineal.

Para conocer más ejemplos del cálculo del Wronskiano se te recomienda **consultar** el libro de Carmona & Filio (2011) en el capítulo 4, ejemplos 2 y 3 que podrás localizar en la página 157 del mismo.

Una vez hecho esto, deberás ser capaz de resolver sistemas similares utilizando la herramienta expuesta. Comprueba tu aprendizaje y **resuelve** los ejercicios 4.2, del número 37 a 74 (podrás encontrarlos en las páginas 162 a 164 del libro mencionado). Para tener mayor información de este libro visita la sección correspondiente a las *Fuentes de consulta*.

2.2.3. Solución general de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas en fenómenos físicos

Recuerda la forma de las ecuaciones diferenciales de orden n lineales **(1)** vista en el tema 2.1.:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Cornejo *et al* (2008) mencionan que la solución general de la forma **(1)** para x en un intervalo J se encuentra determinada de la siguiente manera

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_{n-1}y_{n-1}(x) + c_ny_n(x)$$

siendo c_1, c_2,… c_n constantes arbitrarias.

Esto es cierto si las $y_i(x)$ tienen independencia lineal, y si las $a_i(x)$ son funciones continuas y diferentes de 0 para toda x en el intervalo, desde $i = 0$ hasta n.

Estudia un ejemplo:

Si fueran dadas tres presuntas soluciones a la ecuación

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

representadas por

$$y = e^x$$
$$y = xe^x$$
$$y = e^{-2x}$$

lo primero que tendrías que hacer para construir una propuesta de solución general es ver si tienen independencia lineal.

Como sabrás, una herramienta que puede apoyar en esta labor es el Wronskiano, en donde si resulta diferente de cero podría suponer independencia lineal en las soluciones.

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{matrix} e^x & xe^x & e^{-2x} \\ e^x & e^x(x+1) & -2e^{-2x} \\ e^x & e^x(x+2) & 4e^{-2x} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &= e^x[(e^x(x+1))(4e^{-2x}) - (-2e^{-2x})(e^x(x+2))] \\ &\quad -e^x[(xe^x)(4e^{-2x}) - (e^{-2x})(e^x(x+2))] \\ &\quad +e^x[(xe^x)(-2e^{-2x}) - (e^{-2x})(e^x(x+1))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^x\,[4e^{-2x}e^x(x+1) + 2e^{-2x}e^x(x+2)] \\ &\quad - e^x\,[4xe^{-2x}e^x - e^{-2x}e^x(x+2)] \\ &\quad + e^x\,[-2xe^{-2x}e^x - e^{-2x}e^x(x+1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^x\,[4e^{-x}(x+1) + 2e^{-x}(x+2)] \\ &\quad - e^x\,[4xe^{-x} - e^{-x}(x+2)] \\ &\quad + e^x\,[-2xe^{-x} - e^{-x}(x+1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [4e^0(x+1) + 2e^0(x+2)] \\ &\quad - [4xe^0 - e^0(x+2)] \\ &\quad + [-2xe^0 - e^0(x+1)] \end{aligned}$$

$$= [4(x+1) + 2(x+2)]$$
$$-[4x - (x+2)]$$
$$+ \ [-2x - (x+1)]$$

$$= [4x + 4 + 2x + 4]$$
$$-[4x - x - 2]$$
$$+[-2x - x - 1)]$$

$$= [6x + 8]$$
$$-[3x - 2]$$
$$+[-3x - 1)]$$

$$= 6x + 8 - 3x + 2 - 3x - 1$$

$$= 9$$

Como el Wronskiano es diferente de cero (resultó ser 9) se supone un conjunto de soluciones con independencia lineal, por lo que se cumple la condición.

Como se mencionó que la solución general es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_{n-1} y_{n-1}(x) + c_n y_n(x)$$

y para $n = 3$

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x)$$

sustituyendo las soluciones dadas en un principio,

$$y_1 = e^x$$
$$y_2 = xe^x$$
$$y_3 = e^{-2x}$$

Se tiene como propuesta de solución general

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x}$$

para la ecuación

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

Para verificar que es solución, lo único que se debe hacer es derivarla y sustituir las derivadas en la ecuación para comprobar la identidad.

Derivando la solución general propuesta

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}$$

$$y' = c_1e^x + c_2\, e^x (x+1) - 2c_3e^{-2x}$$

$$y'' = c_1e^x + c_2\, e^x (x+2) + 4c_3e^{-2x}$$

$$y''' = c_1e^x + c_2\, e^x (x+3) - 8c_3e^{-2x}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

$$c_1e^x + c_2e^x (x+3) - 8c_3e^{-2x} - 3(c_1e^x + c_2e^x(x+1) - 2c_3e^{-2x}) + 2(c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}) = 0$$

Comprobando la identidad

$$c_1e^x + c_2xe^x + 3c_2e^x - 8c_3e^{-2x} - 3c_1e^x - 3c_2xe^x - 3c_2e^x + 6c_3e^{-2x} + 2c_1e^x + 2c_2xe^x + 2c_3e^{-2x} = 0$$

$$e^x (c_1 + 3c_2 - 3c_1 - 3c_2 + 2c_1) + xe^x(c_2 - 3c_2 + 2c_2) + e^{-2x}(6c_3 - 8c_3 + 2c_3) = 0$$

$$e^x (c_1 + 3c_2 - 3c_1 - 3c_2 + 2c_1) + xe^x(c_2 - 3c_2 + 2c_2) + e^{-2x}(6c_3 - 8c_3 + 2c_3) = 0$$

$$e^x (0) + xe^x(0) + e^{-2x}(0) = 0$$

$$0 = 0$$

Con esto se comprueba que

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}$$

es solución de

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

Una vez que has visto la forma en que se puede utilizar la solución general de las ecuaciones diferenciales debes ver su aplicación en fenómenos físicos, que incluyen osciladores (como el movimiento armónico simple), oscilaciones forzadas, caída libre y leyes del movimiento, circuitos eléctricos y flexión de vigas, entre otros. Para ello, deberás **leer** en el libro de Carmona & Filio (2011) que se presenta en el documento *Capítulo 5. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden* los temas referidos a los fenómenos mencionados, analizando los ejemplos y resolviendo los ejercicios en el presentes (p. 220-238). Una vez que lo hagas, deberás ser capaz de reconocer modelos de segundo orden de fenómenos físicos y resolverlos haciendo uso de las técnicas presentadas.

2.2.4. Ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de orden dos

Las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes de orden dos tienen la forma

$$y'' + ay' + by = 0$$

Para retomar conceptos que ya conoces y que te permitirán encontrar la solución para esta forma siguiendo la lógica de Carmona & Filio (2011), recuerda la solución de una de las formas de primer orden por variables separables.

La solución de

$$y' + \mathrm{f}(x)\mathrm{y} = 0$$

resultó ser

$$y = e^{-\int f(x)dx}$$

Si $f(x)$ es una constante k entonces por reglas de integración

$$y = e^{-k\int dx} = e^{-kx}$$

De ahí se deduce que

$$y = ce^{-kx}$$

es solución.

Esta podría ser también solución para la ecuación de segundo orden sujeto de interés en este subtema. Para comprobarlo, se realizan unas adecuaciones para facilitar la verificación.

Se establece que $c = 1$ y $-k = m$ tal que $y = e^{mx}$ sea solución para $y' + ky = 0$.

Se obtiene ahora las dos primeras derivadas de la solución para sustituirlas en la ecuación original de la forma de orden dos.

$$y = e^{mx}$$
$$y' = me^{mx}$$
$$y'' = m^2e^{mx}$$

Sustituyendo en la ecuación original se tiene

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$m^2e^{mx} + ame^{mx} + be^{mx} = 0$$

Simplificando

$$(m^2 + am + b)e^{mx} = 0$$

Retomando la ecuación auxiliar de $m^2 + am + b$ ya que e^{mx} será diferente de 0 para cualquier x en el intervalo.

Calculando las raíces para

$$m^2 + am + b = 0$$

Se tiene que

$$m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

De lo anterior surgen tres posibles situaciones:

a) $a^2 - 4b$ es mayor que cero, tal que m_1 es diferente de m_2: raíces reales. En caso de darse esta situación, la solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

b) $a^2 - 4b$ es igual que cero, tal que m_1 es igual que m_2: raíces reales e idénticas En caso de darse esta situación, la solución general de la ecuación es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_2x}$$

c) $a^2 - 4b$ es menor que cero, tal que m es igual a $\alpha \pm i\beta$: raíces complejas En caso de darse esta situación, la solución general de la ecuación es

$$y = e^{\alpha x}(Acos\beta x + Bsen\beta x)$$

Nota: Se profundizará en temas que te permitirán saber el porqué de las soluciones generales determinadas para las posibles situaciones en los siguientes tres subtemas del capítulo, 2.2.5, 2.2.6 y 2.2.7, incluyendo un video que te explica por qué la solución de raíces complejas incluye senos y cosenos.

Para ver la aplicación de las soluciones provistas para los distintos escenarios estudia los siguientes ejemplos.

Supón que se requiere conocer la solución de la ecuación lineal homogénea $y'' - 2y' - 3y = 0$.

La ecuación auxiliar se escribiría

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

Factorizando

$$(m+1)(m-3) = 0$$

Sus raíces son entonces

$$m + 1 = 0 \rightarrow m_1 = -1$$

$$m - 3 = 0 \rightarrow m_2 = 3$$

De esta manera se tiene que la solución general es

$$y = c_1 e^{m1x} + c_2 e^{m2x} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

Como otro ejemplo, ahora para la situación de encontrar con raíces reales iguales, supón que se requiere saber si $y = xe^{5x}$ es solución de $y'' - 10y' + 25y = 0$.

La ecuación auxiliar se escribiría

$$m^2 - 10m + 25 = 0$$

Factorizando

$$(m-5)(m-5) = 0$$

$$(m-5)^2 = 0$$

Sus raíces son entonces

$$m - 5 = 0 \to m_1 = 5$$

$$m - 5 = 0 \to m_2 = 5$$

De esta manera se tiene que la solución general es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_2x} = c_1e^{5x} + c_2xe^{5x}$$

por lo que xe^{5x} si es parte de la solución general.

Una segunda forma de comprobarlo sería derivar la solución dada en un inicio para comprobarla sustituyendo en la ecuación original.

Esto es

$$y = xe^{5x}$$

$$y' = 5xe^{5x} + e^{5x}$$

$$y'' = 25xe^{5x} + 5e^{5x} + 5e^{5x}$$

Sustituyendo en la original

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$

$$25xe^{5x} + 5e^{5x} + 5e^{5x} - 10(5xe^{5x} + e^{5x}) + 25xe^{5x} = 0$$

$$25xe^{5x} + 5e^{5x} + 5e^{5x} - 50xe^{5x} - 10e^{5x} + 25xe^{5x} = 0$$

$$25xe^{5x} + 25xe^{5x} - 50xe^{5x} + 5e^{5x} + 5e^{5x} - 10e^{5x} = 0$$
$$0 = 0$$

Al comprobarse la identidad, se prueba que $y = xe^{5x}$ es solución.

Como último ejemplo, ahora para la situación de encontrar con raíces complejas, supón que se requiere encontrar la solución para $y'' + 2y' + \frac{5}{4}y = 0$.

La ecuación auxiliar se escribiría

$$m^2 + 2m + \frac{5}{4} = 0$$

Sus raíces son entonces

$$m = -1 \pm \frac{1}{2}i$$

en donde

$$\alpha = -1 \text{ y } \beta = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la forma de la solución general α y β

$$y = e^{\alpha x}(A cos\beta x + B sen\beta x)$$

$$y = e^{-x}(A \cos\frac{1}{2}X + B sen\ \frac{1}{2}x)$$

Para comprobar el aprendizaje obtenido en este subtema **resuelve** ahora los ejercicios del documento *Ejercicios 4.3* del libro de Carmona & Filio (2011, p. 173) del 1 al 15. Una vez que lo hagas podrás valorar que tan claros han quedado los conceptos vistos hasta el momento. Para mayor información del libro refiérete a la sección de *Fuentes de consulta*.

2.2.5. Solución por superposición

El principio de superposición o linealidad en ecuaciones homogéneas consiste en que la adición de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución de la ecuación.

El teorema dice que siendo soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ de la ecuación diferencial homogénea de orden n **(1)**, y estando x en un intervalo J, $y = c_1y_1(x)$, $y = c_2y_2(x)$,…, $y = c_n(x)$ y su combinación lineal $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_my_m(x)$ son también soluciones en el intervalo, siendo c_1, c_2,...,c_m constantes arbitrarias.

De una manera sencilla, Nagle, Saff & Snider (2005, p.185) lo presentan de la siguiente forma:

Si y_1 es solución de

$$ay'' + by' + cy = f_1(x)$$

y y_2 solución de

$$ay'' + by' + cy = f_2(x)$$

entonces la función $c_1y_1 + c_2y_2$ es solución de

$$ay'' + by' + cy = c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$$

para cualquier c_1 y c_2.

Un resultante de esto es que una ecuación diferencial lineal homogénea tendrá siempre una solución $y = 0$ considerada una solución trivial.

Observa un ejemplo de la aplicación del principio de superposición presentado por Cornejo *et al* (2008, p. 73-74).

Si se quisiera ver si las funciones $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones en el intervalo de $(-\infty, \infty)$ de

$$y'' - y' - 2y = 0$$

utilizando el principio de superposición se tendría lo siguiente:

Debido al principio se supone que

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

es también una solución de la ecuación diferencial.

Para comprobarlo, se deriva la solución supuesta para obtener su primera y segunda derivadas y sustituirlas en la ecuación original.

$$y' = 2c_1 e^{2x} - c_2 e^{-x}$$

$$y'' = 4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

Al hacer la sustitución en $y'' - y' - 2y = 0$ queda

$$4c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 2c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-x} = 0$$

Con esto se comprueba que también es solución.

Lee los ejemplos que puedes consultarse el libro de Carmona y Filio (2011) en sus ejemplos 4 y 5, que podrás encontrar en las páginas 153 y 154, en el documento *Capítulo 4. Ecuaciones diferenciales de orden superior*. Una vez analizados los ejemplos deberás poder probar por el principio de superposición o linealidad si una función es solución de una ecuación diferencial. Mayor información del libro puede ser vista en la sección *Fuentes de consulta*.

2.2.6. Solución por coeficientes indeterminados

De acuerdo a Cornejo *et al* (2008) para obtener la solución general de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas puede hacerse uso de la técnica de coeficientes indeterminados, el cual aplica si la parte no homogénea, $f(x)$ en **(1)** tiene las siguientes formas:

a) Polinomial, incluido $f(x) = k$ en donde k es una constante.
b) Exponencial $e^{\alpha x}$.
c) Función trigonométrica con mezcla de funciones seno o coseno $sen\beta x \pm cos\beta x$.
d) Una forma combinada de las antes mencionadas como adiciones y productos finitos.

Ejemplo de las formas anteriores son los siguientes:

a) $\mathrm{f}(x) = k_i\, \mathrm{g}(x) - k_j$ (donde k es una constante)

b) $f(x) = 3x^2 - 4$

c) $f(x) = \frac{15}{4}e^{5x}$

d) $f(x) = 9cos2x + 12cos2x$

e) $f(x) = \frac{15}{4}e^{5x}\,(9cos2x + 12cos2x)$

f) $f\,(x) = 2e^x xcosx - (2x^3 + 6x)\mathrm{e}^{4x}$

g) $f\,(x) = 7$

Con esto se observa que (x) podría encontrar una mezcla lineal de funciones de las formas mencionadas, como lo indica el inciso “d)”, esto es, k, x^n, $x^n e^{\alpha x}$, $x^n e^{\alpha x} sen\beta x$ y $x^n e^{\alpha x} cos\beta x$, en donde α y β son números reales y n es un entero positivo.

Un ejemplo de cómo obtener la solución es el siguiente:

Supón que existe una ecuación no homogénea

$$y'' - 4y = 2sen4x - 6cos4x$$

de la cual se requiere su solución general.

1er paso

Para calcularla, el primer paso es solucionar la parte homogénea, y_h.

La parte homogénea construye la ecuación homogénea asociada a la ecuación completa

$$y'' - 4y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación auxiliar se tienen las siguientes raíces

$$m_1 = 2$$
$$m_2 = -2$$

lo que resulta en

$$y_h = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$$

2do paso

El segundo paso consiste en hacer una propuesta para y_p y calcular las derivadas necesarias, haciendo uso de coeficientes indeterminados (más adelante, en este mismo subtema, se presenta una tabla de ejemplos de propuestas de solución para y_p).

$$y_p = Acos4x + Bsen4x$$

$$y'_p = -4Asen4x + 4Bcos4x$$

$$y''_p = -16A\cos 4x - 16B\,sen 4x$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$y'' - 4y = 2sen4x - 6cos4x$$

$$-16Acos4x - 16Bsen4x - 4(Acos4x + Bsen4x) = 2sen4x - 6cos4x$$

Entonces se reacomoda para poder simplificar

$$-16Acos4x - 16Bsen4x - 4Acos4x - 4Bsen4x = 2sen4x - 6cos4x$$

$$-16Bsen4x - 4Bsen4x - 4Acos4x - 16Acos4x = 2sen4x - 6cos4x$$

$$(-16B - 4B)\text{sen}4x + (-4A - 16A)cos4x = 2sen4x - 6cos4x$$

$$(-20B)sen4x + (-20A)\cos 4x = 2sen4x - 6cos4x$$

Para calcular los valores de A y B se encuentra que

$$(-20B)sen4x + (-20A)\cos 4x = 2sen4x - 6cos4x$$

De esta manera

$$-20B = 2 \quad \rightarrow \quad B = \frac{2}{-20} \qquad B = \frac{-1}{10}$$

$$-20A = -6 \quad \rightarrow \quad A = \frac{-6}{-20} \qquad A = \frac{3}{10}$$

Sustituyendo en y_p

$$y_p = \frac{3}{10} \quad cos4x \ - \frac{1}{10}\, sen4x$$

3er paso

El tercer paso consiste en conformar la solución general con y_h y y_p.

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y_p = \frac{3}{10} \quad cos4x \ - \frac{1}{10}\, sen4x$$

Por lo que la solución general es

$$y = c_1\, e^{2x} + c_2\ e^{-2x} + \frac{3}{10} cos4x - \frac{1}{10} sen4\,\mathrm{x}$$

En caso de necesitar combinar funciones trigonométricas, exponenciales y polinomios se recurre al principio de superposición aplicado en ecuaciones no homogéneas, el cual dice que si y_{p1}, $y_{p2} \ldots$, $y_{p\ r}$ son r soluciones particulares de la ecuación con la forma **(1)**, la solución particular y_p de **(1)** se formará con

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}\ + \cdots + y_{pr}.$$

Un ejemplo de la forma de hacerlo es el que se presenta a continuación.

Si se desea obtener la solución general de

$$y'' + 5y' + 4y = e^x + 2x^2 + 6$$

para hacerlo se seguirán los tres pasos del ejemplo anterior.

1er paso

Para calcularla, el primer paso es solucionar la parte homogénea, y_h.

La parte homogénea construye la ecuación homogénea asociada a la ecuación completa

$$y'' + 5y' + 4y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 + 5m + 4 = 0.$$

Resolviendo la ecuación auxiliar se tienen las siguientes raíces

$$m_1 = -1$$
$$m_2 = -4$$

lo que resulta en

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$$

2do paso

El segundo paso consiste en hacer una propuesta para y_p y calcular las derivadas necesarias, haciendo uso de coeficientes indeterminados y superposición.

$y_{p1} = Ae^x$ para $f_1(x) = e^x$

$y_{p2} = Bx^2 + Cx + D$ para $f_2(x) = 2x^2 + 6$

de tal manera que

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = Ae^x + Bx^2 + Cx + D$$

Calculando las derivadas necesarias

$y_p = Ae^x + Bx^2 + Cx + D$

$y_p' = Ae^x + 2Bx + C$

$y_p'' = Ae^x + 2B.$

Se sustituye ahora en la ecuación original.

$y'' + 5y' + 4y = e^x + 2x^2 + 6$

$(Ae^x + 2B) + 5(Ae^x + 2Bx + C) + 4(Ae^x + Bx^2 + Cx + D) = e^x + 2x^2 + 6$

Entonces se reacomoda para poder simplificar

$Ae^x + 2B + 5Ae^x + 10Bx + 5C + 4Ae^x + 4Bx^2 + 4Cx + 4D = e^x + 2x^2 + 6$

Para calcular los valores de A, B, C, D se encuentra que

$10Ae^x + 4Bx^2 + (10B + 4C) + (2B + 5C + 4D) = e^x + 2x^2 + 0x + 6$

De esta manera

$$10A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{10}$$

$$4B = 2 \rightarrow B = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$10B + 4C = 0 \rightarrow C = -\frac{10B}{4} \rightarrow C = -\frac{10}{4} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow C = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$$

$$2B + 5C + 4D = 0 \rightarrow D = \frac{-2B}{4} - \frac{5C}{4} \rightarrow D = \frac{-2}{8} + \frac{25}{16} = \frac{25}{16} - \frac{4}{16} = \frac{21}{16}$$

Sustituyendo en

$$y_p = Ae^x + Bx^2 + Cx + D$$
$$y_P = \frac{1}{10}e^x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{21}{16}$$

3er paso

El tercer paso consiste en conformar la solución general con y_h y y_p.

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x}$$

$$y_P = \frac{1}{10}e^x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{21}{16}$$

Por lo que la solución general es:

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{-4x} + \frac{1}{10}e^x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{21}{16}$$

Una vez que has visto la forma de resolver ecuaciones por medio de esta técnica, es importante que sepas que puede fallar en casos especiales, por ejemplo, cuando y_p tiene una función repetida en y_h o a la inversa, y_h tiene una repetida en y_p.

Observa un ejemplo de lo anterior.

Si se requiere determinar una solución particular para

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x$$

Se tendría que la solución propuesta presentaría la forma

$$y_p = Ae^x.$$

Si se deriva

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^x \\ y'_p &= Ae^x \\ y''_p &= Ae^x \end{aligned}$$

Y se sustituye en la ecuación original

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 4y &= 8e^x \\ Ae^x - 5Ae^x + 4Ae^x &= 8e^x \end{aligned}$$

por lo que

$$0 = 8e^x.$$

Esto representa entonces una propuesta de solución particular errónea para y_p.

Observando la función complementaria, solución de la parte homogénea y_h (recuerda que $y = y_h + y_p$), se puede notar que

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 5m + 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación auxiliar se tienen las siguientes raíces

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \\ m_2 &= 4 \end{aligned}$$

lo que resulta en

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{4x}$$

Ae^x ya se encuentra presente en ella, lo que significa que al sustituirlo en la ecuación diferencial resultará el cero obtenido y que marca un resultado incongruente. Se dice que la técnica falla cuando y_p tiene una función repetida en y_h o a la inversa, y_h tiene una repetida en y_p. En este ejemplo se dio el caso.

Para calcular una solución $y = y_h + y_p$ cuando y_p tiene una función repetida en y_h se propondrá una solución particular que no tenga como resultante una incongruencia.

Para el ejemplo anterior se propondrá la solución

$$y_p = Axe^x$$

Derivando se tiene que

$$y_p = Axe^x$$
$$y'_p\, Axe^x + Ae^x$$
$$y''_p = Axe^x + 2Ae^x$$

Se sustituye ahora en la ecuación diferencial original provista

$$y'' - 5y' + 4y = 8e^x$$

$$(Axe^x + 2Ae^x) - 5(Axe^x + Ae^x) + 4(Axe^x) = 8e^x$$

Simplificando

$$Axe^x + 2Ae^x - 5Axe^x - 5Ae^x + 4Axe^x = 8e^x$$

$$(A + 4A - 5A)xe^x + (2A - 5A) = 8e^x$$

$$-3Ae^x = 8e^x$$

Despejando A

$$A = \frac{8e^x}{-3e^x} = -\frac{8}{3}$$

Sustituyendo en la solución propuesta

$$y_p = Axe^x$$

Se obtiene la solución particular

$$y_p = -\frac{8}{3}xe^x$$

De esta manera se encuentra que existen dos posibles situaciones para la solución a este tipo de ecuaciones:

a) $y = y_h + y_p$ cuando y_p <u>no tiene</u> una función repetida en y_h

b) $y = y_h + y_p$ cuando y_p <u>tiene</u> una función repetida en y_h

En caso de enfrentarte con la primera situación, inciso "a)", ya se explicó cómo resolver proponiendo formas para la solución particular. Para facilitar el proceso, se proporciona a continuación una pequeña lista de ejemplos de soluciones particulares tentativas para la parte no homogénea $f(x)$ de **(1)**. Notarás que para las funciones más complicadas la propuesta es una simple combinación de otras más sencillas, tip que te será útil para cuando necesites construir tus propias formas:

Parte no homogénea $f(x)$	Forma propuesta para y_p
k (constante cualquiera)	A
$8x + 2$	$Ax + B$
$8x^2 + 2$	$Ax^2 + Bx + C$
$x^3 + 2x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
$cos4x$	$Asen4x + Bcos4x$
$sen4x$	$Asen4x + Bcos4x$
e^{4x}	Ae^{4x}
$(8x - 4)e^{4x}$	$(Ax - B)e^{4x}$
x^3e^{4x}	$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)e^{4x}$
$e^{2x}sen4x$	$Ae^{2x}cos4x + Be^{2x}sen4x$
$8x^3cos4x$	$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)cos4x + (Fx^3 + Gx^2 + Hx + I)sen4x$
$8x^3e^{5x}cos4x$	$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + E)e^{5x}cos4x + (Fx^3 + Gx^2 + Hx + I)e^{5x}sen4x$

Si te enfrentas con la segunda situación, ya se explicó que se puede proponer una forma de solución particular que no tenga términos repetidos en y_h. Para hacerlo de una manera sencilla, se sugiere que y_p se multiplique por x^n, en donde n sea el número positivo entero menor que elimine la duplicidad. Esto lo revisaste aplicado en el ejemplo.

Segundo ejercicio en donde se hará uso de esta sugerencia (Cornejo *et al* 2008):

Se requiere calcular la solución general de

$$e^{2x}x^{-1}\frac{d^3y}{dx^3}+2e^{2x}x^{-1}\frac{d^2y}{dx^2}-9e^{2x}x^{-1}\frac{dy}{dx}-18e^{2x}x^{-1}y=1$$

lo primero que se tendría que hacer es ponerla en la forma de **(1)**

$$e^{2x}x^{-1}\left(\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-9\frac{dy}{dx}-18y\right)=1$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-9\frac{dy}{dx}-18y=e^{-2x}x$$

Reescribiendo para facilitar su lectura

$$y'''+2y''-9y'-18y=e^{-2x}x$$

Se aplican los pasos del algoritmo.

1er paso

Para calcularla, el primer paso es solucionar la parte homogénea, y_h–

$$y'''+2y''-9y'-18y=0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^3+2m^2-9m-18=0$$

Resolviendo la ecuación auxiliar, se observa que si se factoriza

$$m^2(m+2)-9(m+2)=0$$

$$(m^2-9)\,(m+2)=0$$

Se tiene

$$m^2-9=0 \quad \text{y} \quad m+2=0$$

obteniendo así las siguientes raíces

$$m_1=-2$$
$$m_2=3$$
$$m_3=-3$$

lo que resulta en

$$y_h=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}+c_3e^{-3x}$$

2° paso

El segundo paso consiste en hacer una propuesta para y_p.

La parte no homogénea es xe^{-2x} por lo que se propone, según la tabla,

$$y_p=(Ax+B)\mathrm{e}^{-2x}$$

Si observas la propuesta, se encuentra que su segundo término ya se repite en la solución de la parte homogénea, siendo igual al primero de ésta

$$y_p=(Ax+B)^{-2x}=Axe^{-2x}+\boldsymbol{Be^{-2x}}$$

$$y_h=\boldsymbol{c_1e^{-2x}}+c_2e^{3x}+c_3e^{-3x}$$

La sugerencia dice que se multiplique por x^n, por lo que la nueva propuesta será

$$y_p = (Ax + B)\, xe^{-2x} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x} = Ax^2e^{-2x} + Bxe^{-2x}$$

Entonces, calculando las derivadas

$$y_p = Ax^2e^{-2x} + Bxe^{-2x}$$

$$y_p' = (-2Ax^2 + (2A - 2B)\, x + B)\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y_p'' = (4Ax^2 - (8A - 4B)\, x + 2A - 4B)\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y_p''' = (-8Ax^2 + (24A - 8B)\, x + 4A + 4B)\mathrm{e}^{-2x}$$

Se sustituye ahora en la ecuación original y se simplifica

$$y''' + 2y'' - 9y' - 18y = e^{-2x}x$$

$$\begin{aligned}(-8Ax^2 + (24A - 8B) + 4A + 4B)e^{-2x} + 2(4Ax^2 - (8A - 4B) + 2A - 4B)\mathrm{e}^{-2x}\\ - 9(-2Ax^2 + (2A - 2B) + B)\mathrm{e}^{-2x} - 18(Ax^2e^{-2x} + Bxe^{-2x})\\ = e^{-2x}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(-8Ax^2 + (24A - 8B)\, x + 4A + 4B) + 2(4Ax^2 - (8A - 4B)\, x + 2A - 4B) - 9(-2Ax^2\\ + (2A - 2B)\, x + B) - 18(Ax^2 + Bx)]\mathrm{e}^{-2x} = xe^{-2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[-8Ax^2 + 24Ax - 8Bx + 4A + 4B + 8Ax^2 - 16Ax + 8Bx + 4A - 8B + 18Ax^2 - 18Ax\\ + 18Bx - 9B - 18Ax^2 - 18Bx]e^{-2x} = xe^{-2x}\end{aligned}$$

$$[-10Ax + 8A - 13B]e^{-2x} = xe^{-2x}$$

$$-10Axe^{-2x} + 8Ae^{-2x} - 13Be^{-2x} = xe^{-2x} + 0$$

Con esto se identifican los coeficientes de los componentes de ambos lados

$$-10A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{10}$$

$$8A - 13B = 0 \rightarrow B = \frac{8}{13}A \rightarrow B = \left(\frac{8}{13}\right)\left(-\frac{1}{10}\right) \rightarrow B = -\frac{8}{130} \rightarrow B = -\frac{4}{65}$$

$$y_p = -\frac{1}{10}x^2e^{-2x} - \frac{4}{65}xe^{-2x} = -\left(\frac{x^2}{10} + \frac{4}{65}x\right)e^{-2x}$$

3[er] paso

El tercer paso consiste en conformar la solución general con y_h y y_p.

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-3x}$$

$$y_p = -\left(\frac{x^2}{10} + \frac{4x}{65}\right) e^{-2x}$$

Por lo que la solución general es

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-3x} - \left(\frac{x^2}{10} + \frac{4x}{65}\right) e^{-2x}$$

Para ver desde el enfoque de autores diferentes la forma de resolver por coeficientes indeterminados una ecuación diferencial y ejemplos de ello, **remítete** al documento *Capítulo 3. Ecuaciones lineales de orden superior*, del libro de Edwards, C. H. y Penney, D. E. (2009). Una vez analizados los ejemplos deberás ser capaz de resolver ecuaciones similares por los métodos expuestos.

Al final del siguiente subtema podrás valorar tu aprendizaje hasta el momento haciendo uso de coeficientes indeterminados por diferentes métodos.

2.2.7. Solución por el método de operador anulador

La ecuación diferencial no homogénea de la forma **(1)** (tema 2.1. de esta unidad)

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Se reescribe para facilitar su tratamiento como

$$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_2D^2y + a_1Dy + a_0y = f(x)$$

O lo que es lo mismo,

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y = f(x),$$

en donde

$$a_i = a_i(x) \text{ y } D^i = \frac{d^i}{dx^i}$$

La ecuación se puede reescribir para simplificar el lado izquierdo como

$$L(y) = f(x),$$

siendo L el operador lineal de n orden diferencial o polinomial.

Además de servir para mostrar una vista simplificada un operador diferencial facilita, si se encuentra uno que anule en **(1)** a $f(x)$, obtener la forma de y_p.

Dos conceptos que sirven de soporte para poder encontrar soluciones haciendo uso del método de operador anulador son el de *factorización de operadores* y el de *operador anulador*.

La **factorización de operadores** es realizable en **(1)** mientras pueda factorizarse el polinomio de la ecuación auxiliar. Esto es, si se tiene

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

y r_1 es raíz en ella, $L = (D - r_1)P(D)$, siendo $P(D)$ un operador de orden $n-1$ diferencial lineal (Zill, D., Cullen, M., 2009).

Observa un ejemplo.

Si se trata D como una expresión algebraica se puede factorizar

$$D^2 + 9D + 20$$

Como

$$(D + 4)(D + 5)$$

ó

$$(D + 5)(D + 4)$$

Aplicando esto a una ecuación diferencial, supón que se tiene

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Esta ecuación, de acuerdo a lo dicho anteriormente, puede escribirse como

$$(D^2 + 6D + 9)y = 0,$$

$$(D + 3)(D + 3)y = 0$$

ó

$$(D + 3)^2 y = 0$$

El segundo concepto, el del **operador anulador**, puede ser explicado de la siguiente forma, según Zill y Cullen (2009):

L es un anulador de $f(x)$ si es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes y f se puede derivar tanto como se necesita, cumpliendo con

$$L(f(x)) = 0.$$

A continuación, se presentan ejemplos que te facilitarán comprender lo anterior.

D es anulador de $y = k$ donde k es una constante, ya que $Dy = Dk = 0$.

D^2 es anulador de $y = x$, ya que $Dy = Dx = 1$, y $D^2y = D^2x = 0$.

D^3 es anulador de $y = x^2$, ya que $Dx^2 = 2x$, $D^2x^2 = 2$, y $D^3x^2 = 0$

D^4 es anulador de $y = x^3$, ya que $D^4x^3 = 0$, como D^5 es anulador de $y = x^5$.

Se detecta así un patrón que muestra que $\boldsymbol{D^n}$ **anula las funciones** $k, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Por reglas de derivación, esta puede hacerse elemento por elemento en una suma, por lo que un polinomio con la forma

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_{n-2}x^{n-2} + c_{n-1}x^{n-1}$$

podrá anularse si se encuentra un operador que lo haga con la potencia más alta de x.

Aplicando el concepto a la solución de **(1)**, y recordando que $y = y_h + y_p$ se tiene que las funciones que se anularían son las obtenidas de la solución general de la homogénea y_h, o lo que es lo mismo, las de $L(y) = 0$.

El operador $(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{\alpha})$ **anula las funciones** $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}$.

Como se puede ver, la auxiliar de

$$(D - \alpha)^n y = 0$$

es

$$(m - \alpha)^n = 0$$

lo que dice que α es raíz de n multiplicidad, deduciendo entonces que la forma de la solución general sería

$$y = c_1e^{\alpha x} + c_2xe^{\alpha x} + c_3x^2e^{\alpha x} + \cdots + c_nx^{n-1}e^{\alpha x}$$

El operador $[\boldsymbol{D}^2 - 2\boldsymbol{\alpha D} + (\boldsymbol{\alpha}^2 + \boldsymbol{\beta}^2)]^{\boldsymbol{n}}$ **anula las funciones**

$$e^{\alpha x}cos\beta x, xe^{\alpha x}cos\beta x, x^2e^{\alpha x}cos\beta x, \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}sen\beta x, xe^{\alpha x}sen\beta x, x^2e^{\alpha x}sen\beta x, \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}sen\beta x$$

A continuación, se presentan un par de ejemplos que te facilitarán proponer operadores anuladores cuando lo requieras.

a) El operador anulador de $Ax^3 - Bx^2 + C$ es:

$$D^4$$

por lo que

$$D^4(Ax^3 - Bx^2 + C) = 0$$

ya que el grado más alto de x es 3.

b) El operador anulador de e^{-Ax} es:

$$(D+A)$$

por lo que

$$(D+A)\, e^{-Ax}=0$$

ya que $(D-\alpha)^n$ anula a $e^{\alpha x}$, donde $\alpha=-A$ y $n=1$.

c) El operador anulador de $Ae^{2x}-Bxe^{2x}$ es:

$$(D-2)^2$$

por lo que

$$(D-2)^2(Ae^{2x}-Bxe^{2x})=0$$

ya que $(D-\alpha)^n$ anula a $e^{\alpha x}$ y a $xe^{\alpha x}$, donde $\alpha=2$ y $n=2$.

d) El operador anulador de $Ae^{-x}cos4x-Be^{-x}sen4x$ es:

$$D^2+2D+17$$

por lo que

$$(D^2+2D+17)(Ae^{-x}cos2x-Be^{-x}sen2x)=0$$

ya que $[D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n$ anula a $e^{\alpha x}cos\beta x$ y a $e^{\alpha x}sen\beta x$, donde $\alpha=-1$ y $\beta=4$.

Cornejo *et al* (2008) describen un algoritmo general para solucionar ecuaciones de la forma **(1)** utilizando coeficientes indeterminados y el método de operador anulador.

1er paso

Lo primero que se hará para solucionar a **(1)** es recordar que, como ya se ha mencionado en temas anteriores,

$$y = y_h + y_p$$

por lo que se debe resolver la ecuación homogénea

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) y = 0$$

para calcular y_h.

2do paso

Posteriormente, se hace una propuesta de un operador con coeficientes constantes que anule la parte no homogénea de **(1)**, $f(x)$, para calcular y_p.

El operador anulador debe tener forma polinomial, de función exponencial o trigonométrica, o ser una combinación lineal de las anteriores.

Al aplicar el operador quedaría la ecuación

$$(b_i D^i + b_{i-1} D^{i-1} + \cdots + b_2 D^2 + b_1 D + b_0)\,(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0) = 0$$

3er paso

Una vez que se ha resuelto la ecuación anterior para tener y_p se obtiene y

$$y = y_h + y_p = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

calculando los coeficientes arbitrarios de y_h y los indeterminados de y_p por medio de comparar y con la ecuación homogénea asociada.

4º paso

Son obtenidos los coeficientes de y_p sustituyéndola en la ecuación original no homogénea de la forma **(1)** usando coeficientes indeterminados, y los que se obtengan se sustituirán en la solución total surgida del tercer paso

$$y = y_h + y_p = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

Para clarificar el algoritmo anterior, se pone el siguiente ejemplo (Zill & Cullen, 2009, p.154):

Se desea resolver $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4senx$.

1er paso

Resolviendo la ecuación homogénea para obtener y_h.

$$y'' - 3y' = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 3m = 0$$

Resolviendo la ecuación auxiliar

$$m^2 - 3m = 0$$

$$m(m-3) = 0$$

por lo que

$$m = 0 \text{ y } m - 3 = 0$$

Se tienen las siguientes raíces

$$m_1 = 0$$
$$m_2 = 3$$

lo que resulta en

$$y_h = c_1 + c_2e^{3x}$$

2º paso

Se hace la propuesta de un operador con coeficientes constantes que anule la parte no homogénea para calcular y_p.

Aquí se harán dos propuestas de operadores anuladores, ya que se tienen dos componentes en el lado no homogéneo de la ecuación, $8e^{3x}$ y $4senx$.

1) El operador anulador de $8e^{3x}$ es

$$(D-3)$$

por lo que

$$(D-3)\ 8e^{3x}=0$$

ya que $(D-\alpha)^n$ anula a $e^{\alpha x}$, donde $\alpha=3$ y $n=1$.

2) El operador anulador de $4senx$ es:

$$D^2+1$$

por lo que

$$(D^2+1)(4senx)=0$$

ya que $[D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)]^n$ anula a $e^{\alpha x}sen\beta x$, donde $\alpha=0$ y $\beta=1$.

Se aplica el operador resultante, $(D-3)(D^2+1)$ a ambos lados de la ecuación original, $y''-3y'=8e^{3x}+4senx$, haciendo

$$y''-3y'=(D^2-3D)\text{y}$$

resultando en

$$(D-3)(D^2+1)(D^2-3D)y=(D-3)8e^{3x}+(D^2+1)(4senx)$$

$$(D-3)(D^2+1)(D^2-3D)y=0$$

La ecuación auxiliar de ésta última es

$$(m-3)(m^2+1)(m^2-3m)=0$$

Resolviendo

$$(m-3)(m^2+1)(m^2-3m)=0$$

$$(m-3)(m^2+1)\mathrm{m}(m-3)=0$$

$$\mathrm{m}(m-3)^2(m^2+1)=0$$

por lo que, eliminando los términos repetidos en y_h

$$y_p = c_3xe^{3x} + c_4cosx + c_5senx$$

Nota: Para ver cómo la raíz obtenida de $m^2 + 1 = 0$ resulta en una expresión de senos y cosenos, ve el ejemplo del video que se presenta a continuación.

Observa el vídeo que se encuentra en la carpeta de materiales con el nombre de *Obtención de raíces de números negativos*.

3^er paso

Una vez que se ha resuelto la ecuación anterior para tener y_p se obtiene y

$$y = y_h + y_p$$

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3xe^{3x} + c_4cosx + c_5senx$$

calculando los coeficientes arbitrarios de y_h y los indeterminados de y_p por medio de comparar y con la ecuación homogénea asociada.

Para esto, se sustituye y_p y sus derivadas en la ecuación original.

Primero se reescribe y_p

$$y_p = Axe^{3x} + Bcosx + Csenx.$$

Sustituyendo en la ecuación original y simplificando

$$y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4senx$$

$$3Ae^{3x} + (3B - C)senx + (-B - 3C)cosx = 8e^{3x} + 4senx + 0$$

Comparando los coeficientes existentes en ambos lados de la ecuación, se tiene que

$$3A = 8$$
$$3B - C = 4$$
$$-B - 3C = 0$$

por lo que

$$A = \frac{8}{3}$$

$$C = -\frac{B}{3}$$

$$B = \frac{4}{3} + \frac{C}{3} \to B = \frac{4}{3} - \frac{B}{9} \to \frac{9B}{9} + \frac{B}{9} = \frac{4}{3} \to \frac{10B}{9} = \frac{4}{3} \to B = \frac{6}{5}$$

$$c = \frac{-B}{3} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

Sustituyendo los coeficientes obtenidos en y_p

$$y_p = Axe^{3x} + Bcosx + Csenx$$

$$y_p = \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}cosx - \frac{2}{5}senx$$

4º paso

Una vez obtenidos los coeficientes de y_p se sustituyen en la solución total

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3xe^{3x} + c_4cosx + c_5senx$$

resultando la solución general

$$y = c_1 + c_2e^{3x} + \frac{8}{3}xe^{3x} + \frac{6}{5}cosx - \frac{2}{5}senx$$

Un segundo ejemplo se muestra a continuación:

Si se requiere determinar una solución para

$$\frac{e^{-x}\frac{d^2y}{dx^2} - 4e^{-x}y}{senx - cosx} = 1$$

lo primero que se tendría que hacer es ponerla en la forma de **(1)**

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

quedando así

$$(e^{-x})\frac{\frac{d^2y}{dx^2} - 4y}{senx - cosx} = 1$$

$$(e^{-x})(\frac{d^2y}{dx^2} - 4y) = senx - cosx$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x(senx - cosx)$$

Reescribiendo para facilitar su lectura

$$y'' - 4y = e^x(senx - cosx)$$

$$y'' - 4y = e^x senx - e^x cosx$$

Se aplican los pasos del algoritmo.

1er paso

Resolvemos la ecuación homogénea para obtener y_h.

$$y'' - 4y = 0$$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación auxiliar se tienen las siguientes raíces

$$m_1 = 2$$
$$m_2 = -2$$

lo que resulta en

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

2º paso

Se hace la propuesta de un operador con coeficientes constantes que anule la parte no homogénea para calcular y_p.

El operador anulador de $e^x senx - e^x cosx$ es:

$$D^2 - 2D + 2$$

por lo que

$$(D^2 - 2D + 2)(e^x senx - e^x cosx) = 0$$

ya que $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n$ anula a $e^{\alpha x} cos\beta x$ y a $e^{\alpha x} sen\beta x$, donde $\alpha = 1$ y $\beta = 1$.

De esta manera

$y_p = e^x (c_3 cosx + c_4 senx)$

3er Paso

Una vez que se ha resuelto la ecuación anterior para tener y_p se obtiene y

$y = y_h + y_p = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + e^x (c_3 cosx + c_4 senx)$

calculando los coeficientes arbitrarios de y_h y los indeterminados de y_p por medio de comparar y con la ecuación homogénea asociada.

$$y_p = e^x (c_3 cosx + c_4 senx)$$

$$y'_p = c_3 e^x cosx - c_3 e^x senx + c_4 e^x senx + c_4 e^x cosx$$

$$y''_p = 2c_4 e^x \cos x - 2c_3 e^x\, senx$$

Sustituyendo

$$y'' - 4y = e^x (senx - cosx)$$

$$2c_4 e^x cosx - 2c_3 e^x senx - 4e^x (c_3 cosx + c_4 senx) = e^x (senx - cosx)$$

$$2c_4 e^x cosx - 2c_3 e^x senx - 4c_3 e^x cosx - 4c_4 e^x senx = e^x (senx - cosx)$$

$$2c_4 cosx - 2c_3 senx - 4c_3 cosx - 4c_4 senx = senx - cosx$$

$$(-4c_4 - 2c_3) senx - (-2c_4 + 4c_3) cosx = senx - cosx$$

$$-2c_3 - 4c_4 = 1$$

$$4c_3 - 2c_4 = 1$$

$$c_4 = 2c_3 - \frac{1}{2}$$

$$-2c_3 - 4\left(2c_3 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$c_3 = \frac{1}{10}$$

$$c_4 = \frac{3}{10}$$

4º paso

Una vez obtenidos los coeficientes de y_p se sustituyen en la solución total

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \mathrm{e}^{x}(c_3cosx + c_4senx)$$

resultando

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \mathrm{e}^{x}(\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}senx)$$

Debes ahora **leer** los ejemplos 5, 6 y 7, así como el resumen del método que proponen Zill, D., y Cullen, M. (2009, p. 154-156), que se encuentra en el documento Al hacerlo serás capaz de conocer distintas formas de algoritmos existentes para la resolución de un mismo problema, descubriendo que dependiendo de los autores consultados podrán variar los pasos.

Ahora **resuelve** los ejercicios 4.5 en sus incisos del 1 al 64 del libro de Zill, D., y Cullen, M. (2009, p. 156-157) y **compara** tus respuestas con las provistas por los autores (p. RES-5). Una vez que termines habrás valorado tu aplicación del aprendizaje de los conocimientos para resolver ecuaciones por el método del operador anulador para coeficientes indeterminados.

Para complementar tu aprendizaje con un método más general, **revisa** el documento de *4.6 Variación de parámetros* del libro de Nagle, Saff & Snider (2005) y resuelve los ejercicios 4.6 en sus incisos del 1 al 18 (p.192-196), comprobando que tus respuestas coincidan con las de los autores (p. B-7).

Para mayor información de los libros mencionados puedes consultar los datos en la sección de *Fuentes de consulta*.

Cierre de la Unidad

A manera de cierre, es importante enfatizar que a lo largo de la unidad fueron abordados los conceptos relacionados con las ecuaciones diferenciales de segundo orden, revisando sus propiedades, definiéndolas e identificando sus elementos característicos. Se mostró la forma de resolver problemas con condiciones iniciales provistas, así como maneras de clasificarlas por su homogeneidad, linealidad y dependencia lineal, facilitando seleccionar la técnica para resolverlas, incluyendo dentro de estas soluciones por superposición, uso de coeficientes indeterminados y operadores anuladores. En la unidad se incluyeron ejemplos de cómo encontrarlas en fenómenos físicos representables por ellas, para así facilitar y proponer soluciones a problemas relacionados.

Se te invita a continuar con la siguiente unidad, en la que serán definidas la transformada de Laplace y la transformada inversa, las condiciones necesarias para que pueda existir; se verán la linealidad y otras propiedades dentro de este contexto, se mostrarán las transformadas para funciones básicas y definidas por tramos, la forma de calcular la inversa, cómo derivarla e integrarla y sus aplicaciones en fenómenos físicos. Serán definidas también las series de Fourier, trigonométricas y funciones con periodicidad, cubriendo las fórmulas de Euler, la convergencia de series, la distribución de funciones no periódicas en series y sus aplicaciones en fenómenos físicos, concluyendo de esta manera el curso.

Fuentes de consulta

1. Carmona Jover, I. & Filio López, E. (2011). *Ecuaciones diferenciales*. 5ª Ed. México: Pearson Educación de México S.A. de C.V.
2. Cornejo, M. C., Villalobos, E. B., Quintana, P. A. (2008). *Métodos de solución de Ecuaciones Diferenciales y aplicaciones*. México, D.F.: Reverté Ediciones, S.A. de C.V.
3. Edwards, C. H., Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4a ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
4. Nagle, K., Saff, E. B., Snider, A. D. (2005) *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4a ed. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
5. Rainville, E., Bedient, P., y Bedient, R. (1998). *Ecuaciones diferenciales*. 8va Ed. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
6. Zill, D., y Cullen, M. (2009). *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. 7a Ed. México: Cengage Learning Editores.