UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Programa de la asignatura:

Cálculo multivariado

U2 Cálculo diferencial vectorial

DCSBA

BIOTECNOLOGÍA

Índice

Presentación de la Unidad

En esta Unidad se describen los conceptos básicos de la **derivada,** pero extendido al caso de funciones de diversas variables. Particularmente, estudiarás las derivadas parciales de una función y derivadas de orden superior. Asimismo, tendrás la posibilidad de aplicar el concepto de derivada para encontrar los **máximos y mínimos** de una función.

En el contexto de **operadores diferenciales**, estos los podrás calcular mediante el uso del **operador nabla**. Cuando apliques este operador a funciones empleando las operaciones vectoriales del producto escalar, producto vectorial y producto por un escalar; generará, por una parte, la **divergencia y rotacional** de un campo vectorial y por otra, el **gradiente** de una función. Estos nuevos entes matemáticos te serán de gran utilidad para representar campos de fuerza con la ventaja de que puedas aplicarlos a diversas áreas de las ciencias e ingeniería, tales como el electromagnetismo, la óptica, la dinámica de fluidos, entre otras.

En todos los casos estudiados, se debe tener una **interpretación geométrica** de estos operadores. Por lo que es muy importante que tengas a la mano un graficador de campos vectoriales, además de la posibilidad de llevar a cabo esquemas en donde se interprete el sentido físico de estos campos.

Por otra parte, será de gran ayuda tener a la mano un listado de fórmulas de derivación e integración, ya que las fórmulas que fueron establecidas en el cálculo de una variable para derivar e integrar, seguirán siendo útiles en cálculo multivariado.

Propósitos

El estudio de esta Unidad te permitirá:

- Graficar curvas de nivel a partir de la superficie de una función.
- Comprender el concepto geométrico de las derivadas parciales de una función y su interrelación con planos tangentes y gradientes.
- Calcular algebraicamente el gradiente de una función escalar usando el operador nabla, igualmente podrás calcular la divergencia y el rotacional de campos vectoriales.
- Ser capaz de clasificar el tipo de campo vectorial de acuerdo con las direcciones que tengan los vectores graficados.

Competencia específica

Analizar expresiones vectoriales a través de los métodos del álgebra y cálculo vectorial con los operadores diferenciales: gradiente, divergencia y rotacional; así como el cálculo de funciones de varias variables, las integrales vectoriales y sus teoremas integrales para aplicarlos en modelos físico-matemáticos resolubles de fenómenos y sistemas de la ingeniería.

2.1 Derivada

El concepto de la derivada de una función ha sido ampliamente explotado en una gran cantidad de aplicaciones. El estudio de este concepto te ofrecerá ventajas importantes; pues te permitirá entender cómo graficar ciertas funciones que no parecen ser a primera vista fáciles de visualizar. Análogamente al cálculo de una variable, en cálculo multivariado, podrás calcular los máximos y mínimos de una función. Esto último te será de gran utilidad en el momento de graficar o analizar el comportamiento de una infinidad de funciones. El concepto de derivada será ampliado a funciones vectoriales, lo que te dará nuevas herramientas y de gran utilidad para el estudio de las ciencias y la ingeniería.

2.1.1 Funciones de dos o más variables

En este primer tema, se estudian las funciones de dos o más variables y sus derivadas. La forma más eficaz de visualizar una función de dos variables es trazar **curvas de nivel,** estas curvas se pueden proyectar sobre alguno de los planos del espacio tridimensional.

En el ejemplo que se muestra en la gráfica, puedes observar las curvas de nivel de la función polinomial de dos variables:

$$f(x, y) = y^2 - x^2.$$

Las curvas de nivel de una función f de dos variables, vienen dadas por una familia de curvas cuya ecuación general está definida por:

$$y^2 - x^2 = k,$$

en donde c es un número real. Cuando $k > 0$ ó $k < 0$, la correspondiente curva se vuelve una hipérbola. Esto es, si se hace que $k = 2$; la curva resulta ser:

$$y = \sqrt{2 + x^2}$$

En cambio, cuando $k = 0$, las curvas son líneas rectas como las que se observan en forma cruzada sobre el dominio de la función (**Figura 1).**

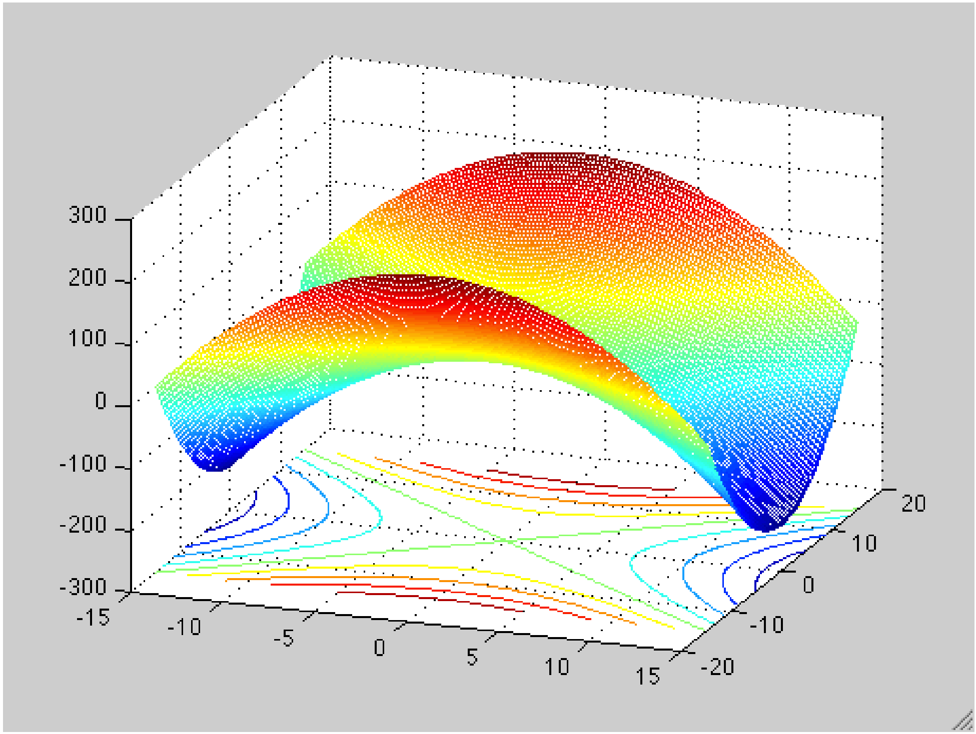

Figura 1. Función de dos variables en el espacio y sus curvas de nivel proyectadas en el plano $X - Y$. La superficie es conocida como la silla de montar.

En un segundo ejemplo podrás observar la gráfica de la función:

$$g(x,y) = xe^{(-x^2-y^2)}$$

Este caso es interesante al presentar una “depresión” y una “montaña”, los cuales al ser proyectadas en el dominio de la función, aparecerán como dos familias de círculos concéntricos, con radio creciente en la medida que se alejan del centro común. (Ver **Figura 2**).

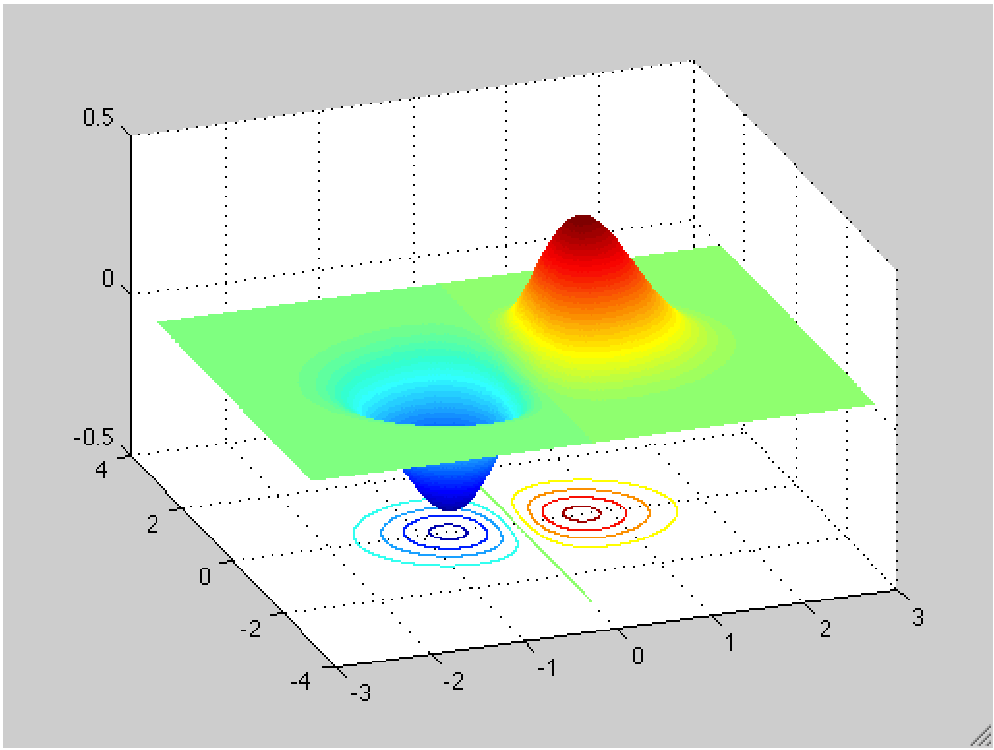

Figura 2. Gráfica de la función.

A manera de comparación entre las dos funciones estudiadas, en las gráficas siguientes se muestran, tanto las superficies en el espacio tridimensional como sus respectivas curvas de nivel. El número de curvas de nivel graficadas dependerá del intervalo de valores asignados para las variables x e y dentro del dominio de la función $[e, f] \times [r, s]$, donde e, f, r, s son constantes. También dependerá del intervalo de valores tomados por la constante k del primer ejemplo.

Observa que los intervalos de valores para x e y de la gráfica de la función, que aparece en el lado superior izquierdo, vienen dados por:

$$-4 \leq x \leq 4$$
$$-5 \leq y \leq 5$$

Este intervalo de valores puede cambiar, como ya lo habrás notado en todas las gráficas presentadas en esta primera parte de la segunda Unidad. Observa en la **figura 3** cómo al cambiar los rangos de valores de los intervalos, las gráficas se modifican. Se pueden volver más planas o más pronunciadas.

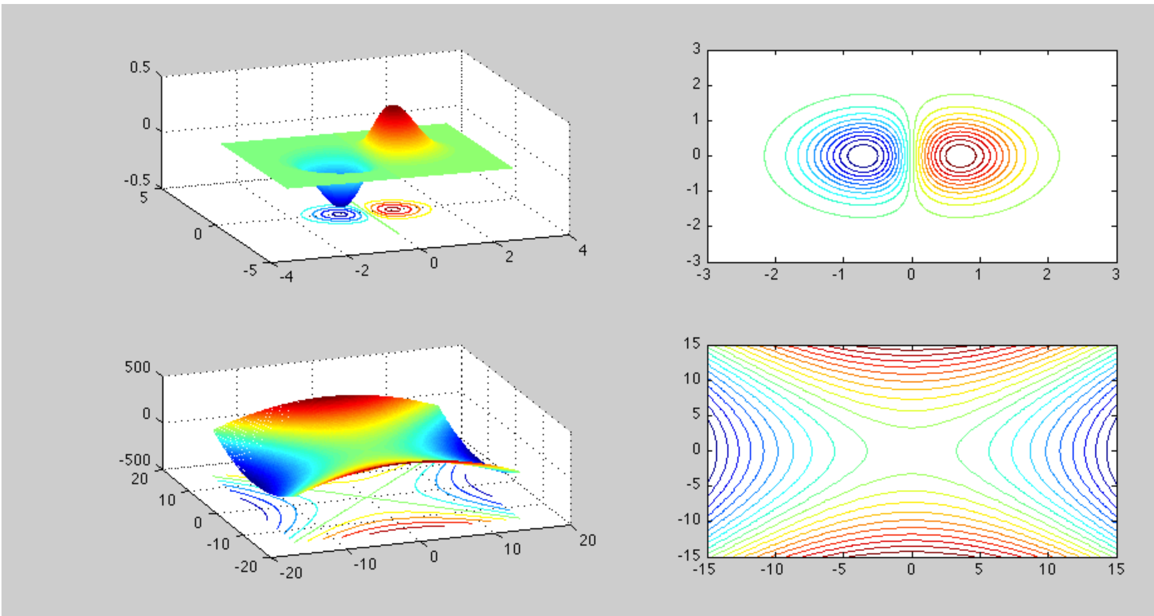

Figura 3. Gráficos de Funciones en el espacio y sus proyecciones en el plano X-Y, conocidas como curvas de nivel.

Un ejemplo del uso de las curvas de nivel lo podrás encontrar en los mapas topográficos de regiones montañosas. Igualmente que en el caso de funciones de temperatura sobre la superficie terrestre, este tipo de funciones suele hacer uso de curvas de nivel, a este tipo de distribuciones se les conoce como **isotermas**.

Para ampliar la información, te invito a que leas las páginas las páginas 873-883 del libro “Cálculo multivariable”, *Capítulo 14. Derivadas parciales,* de Stewart (2002).

También te recomiendo que leas la *sección 14.4. Planos tangentes y aproximaciones lineales.*

2.1.2 Derivadas parciales

La descripción de una función no quedaría completa sino se introduce el concepto de derivada. Por lo que las **derivadas parciales** $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de una función continua f de dos variables, quedan establecidas mediante las expresiones:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

El concepto geométrico subyacente a estas expresiones lo puedes encontrar si evalúas en un punto dado (a,b), a una función.

Sea la función $z = f(x,y)$, la gráfica de esta función dada por la superficie S, la puedes ver en la **figura 4**. Si $f(a,b)$=c entonces el punto $P(a,b,c)$ se encuentra en S.

Al fijar $x = b$, se centrara la atención en una curva que se podrá llamar C_1 en la que el plano vertical $x = 0$ corta a S. Justo en la intersección de ambas superficies se observa la curva C_1.

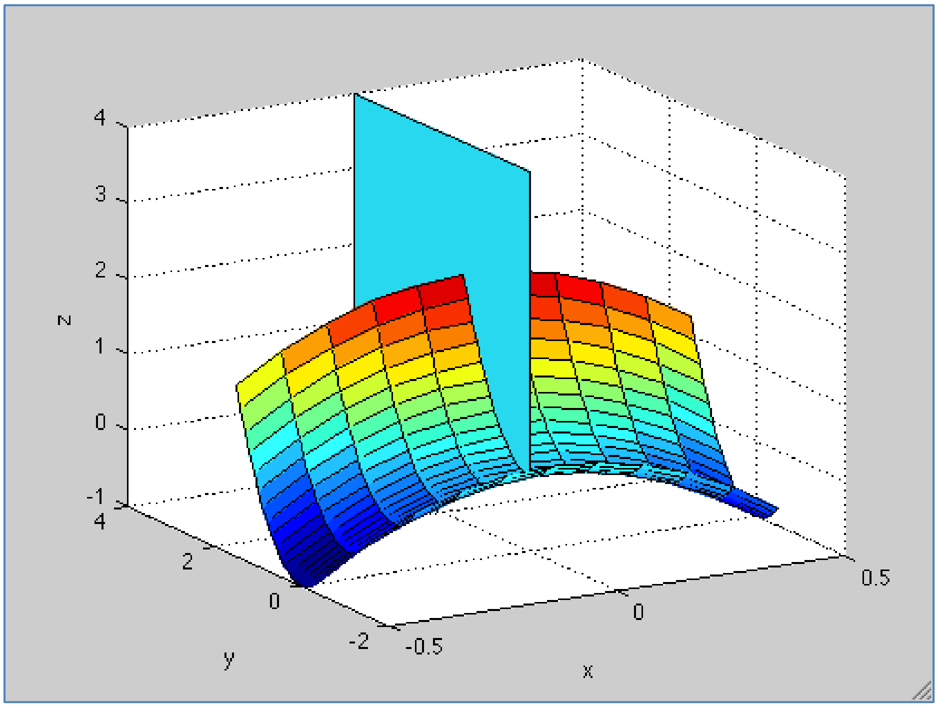

Figura 4. Gráfica de una función cortada por el plano $x = b = 0$.

Es importante que puedas llevar a cabo el cálculo de derivadas parciales usando una tabla de fórmulas. La regla para hallar derivadas parciales de la función $z = f(x, y)$, consta de dos pasos:

1. Para hallar $\frac{\partial f}{\partial x}$, considera a y como una constante, y deriva a $f(x, y)$ con respecto a x.
2. Para hallar $\frac{\partial f}{\partial y}$, considera a x como una constante, y deriva a $f(x, y)$ con respecto a y.

Como un ejemplo del cálculo de las derivadas parciales de una función de dos variables. Sea la función

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2$$

y las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x} = 8x$$

$$\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}} = 2y$$

Desde el punto de vista geométrico, la derivada de una función en una variable, es igual a la pendiente m de la recta tangente en un punto $P(a, f(a))$ de la función. Esto es:

$$m = \frac{df(a)}{dx}$$

De manera similar, ahora puedes calcular las pendientes de las rectas tangentes a la superficie, pero respecto de las dos variables, una pendiente m_1 y otra m_2, una en cada dirección. Por lo que si se toma un punto de la superficie de la función h, se puede calcular las pendientes. Se elige el punto $P(a, b, h(a, b)) = P(1,1,2)$, las pendientes m_1 y m_2 resultan ser;

$$m_1 = \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x} = 8(1) = 8$$

$$m_2 = \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}} = 2(1) = 2$$

Existe además una expresión para calcular la ecuación del plano tangente a la superficie de una función de dos variables; esta expresión viene dada por

$$z - f(a, b) = \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial \mathrm{y}}(y - b)$$

Si se sustituyen los valores tanto del punto $P(1,1,2)$ como de las pendientes $m_1 = 8$ y $m_2 = 2$ que previamente se calcularon, la ecuación del plano tangente es;

$$z = 8x + 2y - 8$$

En la gráfica siguiente (**figura 5 y 6)** podrás observar dos vistas de este plano junto con la función h.

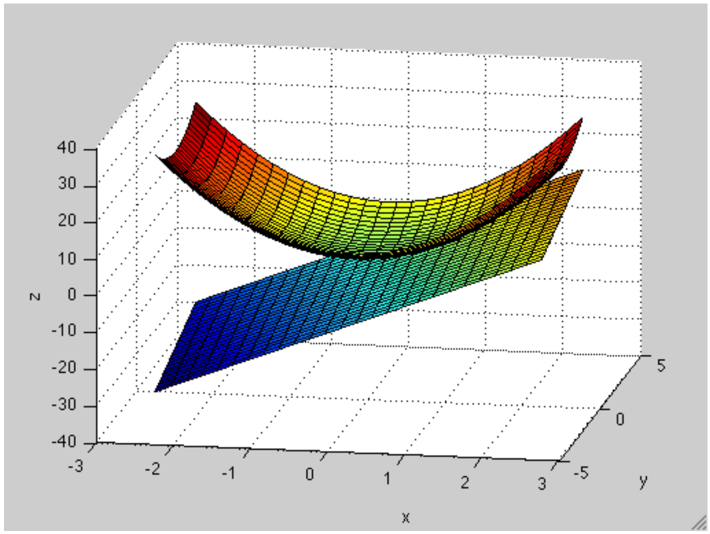

Figura 5.

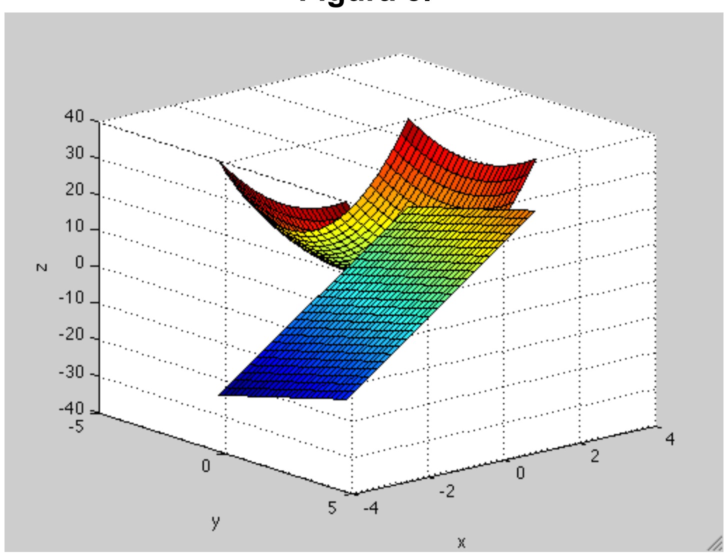

Figura 6. Dos vistas de un plano tangente a la superficie de la función $h(x,y) = 4x^2 + y^2$

2.1.3 Derivadas parciales de orden mayor

El concepto de derivada de orden superior se puede observar cuando dada una función de dos variables, se pueden calcular sus segundas derivadas o terceras o de orden *n.* Un ejemplo de este tipo de funciones las podemos observar en el siguiente ejemplo.

Sea la función

$$f(x,y) = 2x^4y^3 - xy^3 + 3y + 1$$

Calcular las segundas derivadas respecto de las variables x e y.

Para llegar a las segundas derivadas, primero se calcularán las primeras; esto mediante:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3y^3 - y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y^2 - 3xy^2 + 3$$

en ambos casos una de las variables se toma como constante mientras que la otra se vuelve la variable de derivación. Al calcular las segundas derivadas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2y^3 - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^4y - 6xy$$

Asimismo, se puede continuar calculando la tercera derivada, de tal forma que:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 48xy^3$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 12x^4 - 6x$$

2.1.4 Derivadas implícitas de varias variables

Las derivadas implícitas en varias variables se vuelven útiles al estudiar temas relacionados con Ecuaciones Diferenciales. Mientras tanto tomemos una función en la forma implícita,

$$x^2 + y^2 = 20$$

Normalmente, la variable y se encuentra despejada antes de proceder a derivar. Sin embargo cuando se deriva implícitamente, se asume que una de las variables es constante y no se requiere que la otra variable se despeje. Por lo que la derivada implícita resulta ser,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(20)$$

$$2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$$

Para ampliar la información te recomiendo que leas y revises las Secciones 4.1, 4.3 y 4.4 del libro “Ecuaciones diferenciales” *Capítulo 4. Funciones de varias variables*, de Zill, D.G., y Wright, W.S. (2012).

Se te recomienda leer el *Capítulo 1. Diferenciación*, del libro “Cálculo vectorial” de Marsden, (2004), ya que este es un clásico en donde podrás encontrar algunas demostraciones de los teoremas usados. Si tu interés aumenta sobre esta asignatura, te recomiendo consultarlo y realizar algunos de los ejercicios que se proponen. La quinta edición tiene muy interesantes gráficas y además a lo largo del texto podrás encontrar notas históricas de los matemáticos que contribuyeron al cálculo.

Este tópico es muy útil para la comprensión del concepto de la derivada y para la continuación de los temas siguientes. También te sugiero revisar la teoría para un mayor entendimiento de todos los conceptos.

En los temas expuestos, se discutieron las curvas de nivel de una superficie como proyecciones en el dominio de la función. Igualmente, se establecieron las reglas para obtener derivadas parciales de funciones de dos variables. Se calcularon las derivadas para un ejemplo dado y se obtuvo la ecuación de un plano tangente en un punto a la superficie de una función.

2.2 Gradiente

El **gradiente** de una función tiene un conjunto de aplicaciones, en termodinámica por ejemplo el calor fluye de las zonas de mayor a las de menor temperatura. Esto se conoce como un gradiente de temperatura. Un caso típico es el de una barra de acero que se calienta en un extremo, mientras que el otro permanece frío hasta que el calor alcanza el extremo opuesto a la fuente de calor. En otros contextos existe el gradiente electroquímico que como se sabe indica en qué dirección cambia más rápidamente la concentración de una sustancia. Estas y otras aplicaciones motivan el estudio del operador gradiente.

2.2.1 Derivada direccional

Como se mencionó en la presentación de esta Unidad, la aplicación del operador nabla ∇ te permitirá calcular el gradiente de una función escalar. Se comienza por definir el siguiente operador;

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Al calcular el gradiente ∇f de la función f, la expresión anterior toma la forma

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Nuevamente, aparecen los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$. Como podrás observar el hecho de que aparezcan estos vectores unitarios convierte al gradiente automáticamente, en un vector.

Ahora revisa el siguiente ejemplo ilustrativo del cálculo del gradiente:

Sea la función $f(x, y) = x^2 - y^2$, después de calcular las derivadas parciales respecto de las tres variables x, y, z. El gradiente de f toma la forma;

$$\nabla f(x, y) = 2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath}$$

Como puedes observar en la **figura 7**, el gradiente de esta función es nuevamente otra función. Al evaluar para diferentes valores de x e y, el resultado es un campo vectorial como el que se gráfica abajo.

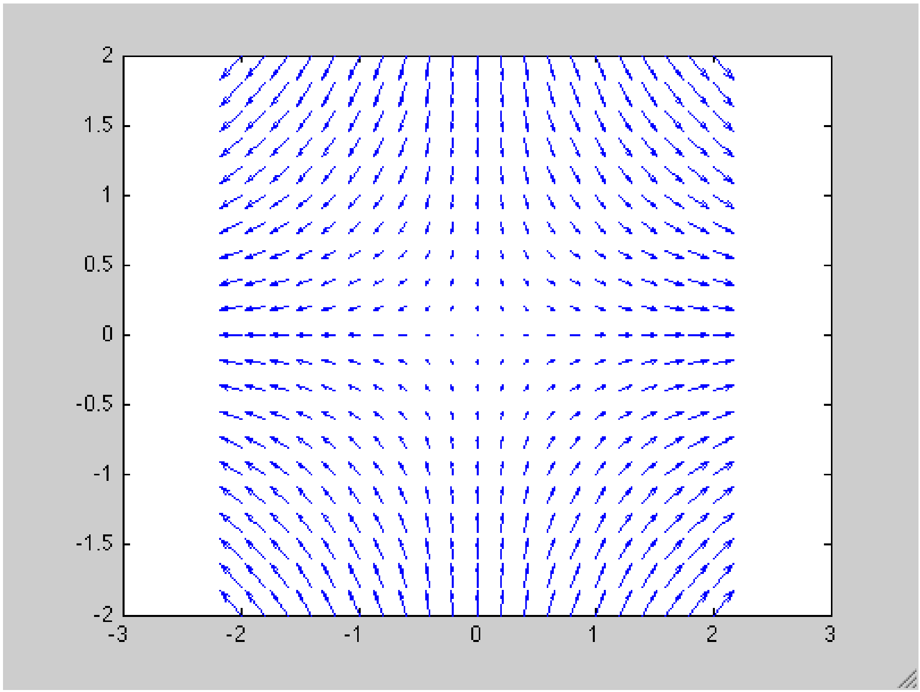

Figura 7. Gradiente de la función $f(x,y) = x^2 - y^2$

2.2.2 Máximos y mínimos

Otro tema que resulta de mucha importancia es el cálculo de máximos y mínimos de una función de dos variables. Como ejemplo se toma la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

Si obtienes las derivadas parciales de la función estas resultarán ser:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6$$

A partir de aquí, debes igualar a cero ambas derivadas y calcular los puntos críticos,

$$2x - 2 = 0$$

$$2y - 6 = 0$$

Al despejar resulta que $x = 1$ y $y = 3$, y si además se evalúa la función con estos valores se encuentra que $f(1,3) = 4$. Por lo que el único punto crítico de la función es $(1, 3, 4)$. Como ya te habrás podido dar cuenta $f(1, 3) = 4$, es el valor mínimo que tiene la función, el cual es comúnmente llamado un mínimo local. El valor obtenido lo podrás ubicar en la parte más baja de la función, justo en el vértice del paraboloide cuya gráfica se ve en la **figura 8**.

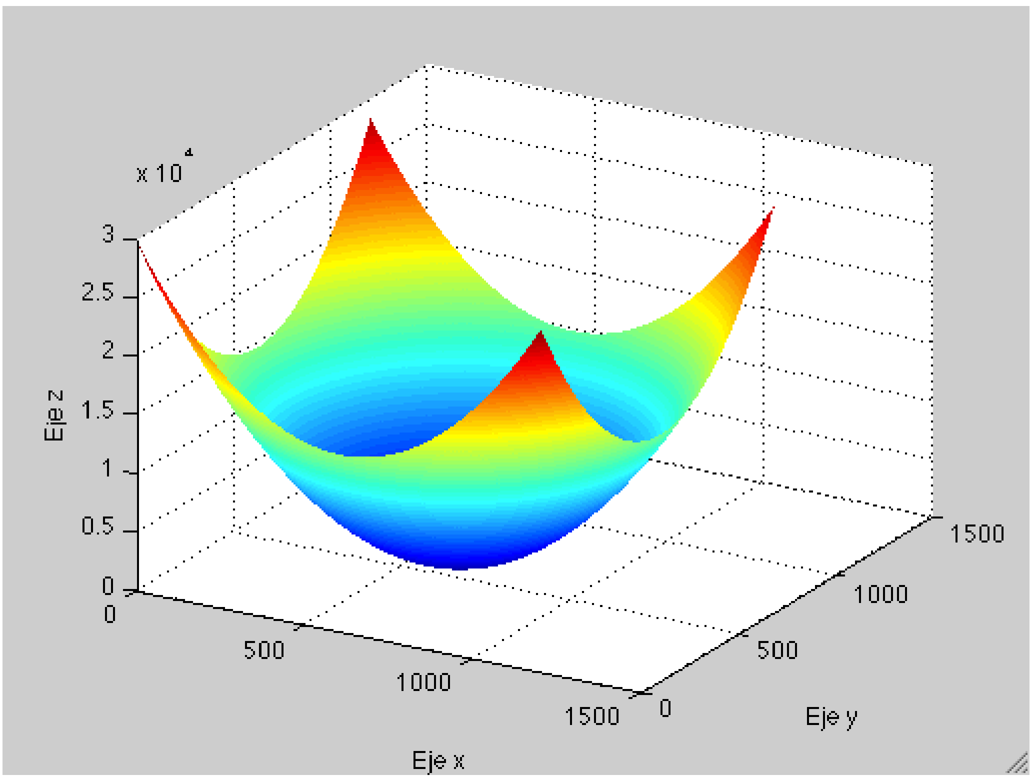

Figura 8. Gráfica de un paraboloide elíptico.

2.2.3 Operador diferencial vectorial nabla y el Laplaciano

Existe un ente matemático llamado operador diferencial vectorial nabla, esta herramienta matemática resulta muy útil cuando se requiere calcular derivadas sobre campos escalares o vectoriales. Es ampliamente usado y dependiendo de su aplicación puede llegar a tener diferentes significados sobre campos vectoriales o escalares. En la sección siguiente se estudiarán algunas de las implicaciones geométricas y físicas de este operador. Por el momento definamos,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}$$

en donde los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ índican el carácter vectorial del operador. Este instrumento matemático no tiene en sí mismo mayor repercusión, hasta no aplicarlo a funciones escalares o vectoriales. El ejemplo más sencillo del operador nabla es cuando se obtiene el laplaciano de una función escalar.

Sea la función

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

finalmente,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

la última expresión suele llamarse el laplaciano de la función f.

2.2.4 Interpretación Geométrica de la derivada de un vector

En física, el laplaciano aparece en múltiples contextos como la teoría del potencial, la propagación de ondas, la conducción del calor, la distribución de tensiones en un sólido deformable, entre otras áreas. Pero de todas estas situaciones ocupa un lugar destacado en la electrostática y en la mecánica cuántica. En la electrostática, el operador laplaciano aparece en la ecuación de Laplace y en la ecuación de Poisson. Mientras que en la mecánica cuántica el laplaciano de la función de onda de una partícula da la energía cinética de la misma. En matemáticas, las funciones tales que su laplaciano se anula en un determinado dominio, se llaman funciones armónicas sobre el dominio. Estas funciones tienen una excepcional importancia en la teoría de funciones de variable compleja.

Te recomiendo que leas y revises el *Capítulo 3. Derivadas de orden superior: máximos y mínimos* del libro "Cálculo vectorial" de Marsden (2004). En este texto encontrarás los temas tratados desde un punto de vista más formal desde el punto de vista matemático. La notación es diferente respecto al anterior texto y las demostraciones de los teoremas son muy comunes. Se te recomienda observar la gráfica de la Figura 3.4.2., en donde se ha graficado el gradiente de una función.

El cálculo del gradiente requiere básicamente de tus habilidades en la derivación de funciones, por lo que no olvides revisar todas las fórmulas conocidas en la derivación: desde las algebraicas, pasando por las trigonométricas hasta las inversas.

El cálculo de máximos y mínimos es de mucha utilidad en diferentes áreas de las ciencias y la ingeniería, por lo que te sugiero realizar el mayor número de problemas que te sea posible.

2.3 Operadores diferenciales vectoriales

En diversas áreas de las ciencias físicas es común trabajar con **campos vectoriales**. En electromagnetismo, por ejemplo, el campo eléctrico de una carga puntual lo puedes representar mediante un campo de fuerzas cuya fuente es la propia carga eléctrica. Dependiendo del signo de la carga, el campo puede radialmente ser divergente o convergente. Lo que implica que, la carga sea una fuente o un sumidero de campo eléctrico. Asimismo, el campo magnético alrededor de un conductor recto (un alambre de cobre) que transporta una corriente eléctrica, es perpendicular a la dirección de la corriente.

2.3.1 Divergencia

La representación de los campos eléctrico y/o magnético, se realiza mediante campos de vectores en el plano o en el espacio. Para ello, se requiere aplicar nuevamente el operador nabla sobre alguno de los campos. Sin embargo, las operaciones que se tiene que llevar a cabo son diferentes. En el caso de que calcules la **divergencia**, esta se realiza usando el producto escalar entre el operador nabla y el campo de fuerzas, Mientras que si vas a calcular el **rotacional**, este se calcula empleando el operador nabla en producto vectorial con el campo en cuestión.

Para conocer más sobre el tema de divergencia y cálculo rotacional, te invito a que revises de las páginas 286 a 299 dentro del *Capítulo 4. Funciones con valores vectoriales* en el libro "Calculo vectorial" de Marsden, (2004).

Supón un campo de fuerzas $\overrightarrow{F_1} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, puedes calcular su divergencia $div\vec{F}$ ó $\nabla \cdot \overrightarrow{F_1}$, mediante la expresión,

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F_1} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, y, 0) = 1 + 1 + 0 = 2 > 0$$

Como el signo es positivo, significa que el campo es divergente, en este caso todos los vectores apuntan hacia fuera desde el centro del campo, como se muestra en la primera gráfica (**figura 9)**.

Como segundo ejemplo se calcula la divergencia del campo, $\overrightarrow{F_2} = -x\hat{\imath} - y\hat{\jmath}$. Nuevamente usando la definición:

$$\nabla \cdot \overrightarrow{F_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (-x, -y, 0) = -1 - 1 + 0 = -2 < 0$$

Al ser ahora el signo negativo, los vectores van hacia dentro como si terminaran en el centro del campo. Esto se puede observar en la segunda gráfica (**figura 10)**.

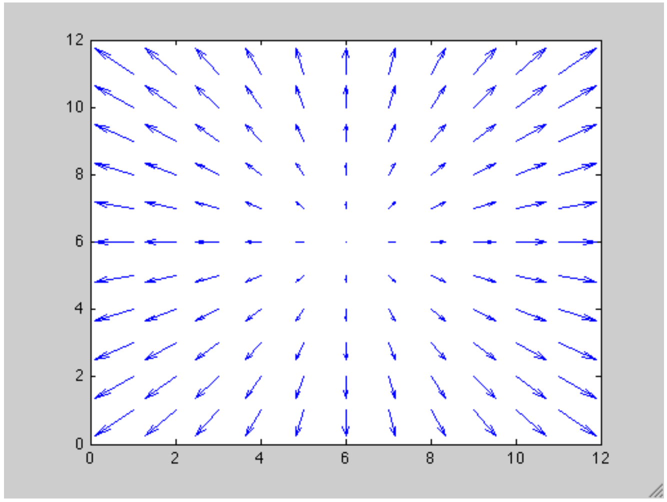

Figura 9. Divergencia de un campo vectorial, todos los vectores van hacia afuera.

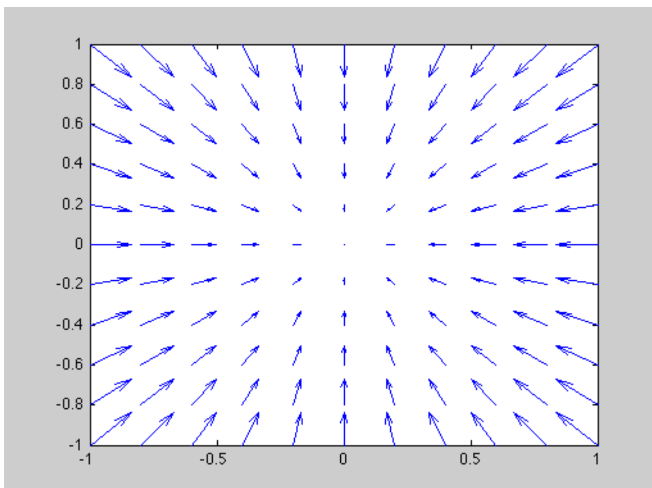

Figura 10. Divergencia de un campo vectorial, todos los vectores van hacia dentro.

2.3.2 Rotacional

Si el operador nabla se aplica sobre un campo vectorial $\vec{G} = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$ pero ahora usando el producto vectorial en la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Esta última operación se le llama el rotacional de $\vec{G}$. Si calculas el determinante, encontrarás que el rotacional del campo vectorial es, (ver **figura 11)**

$$\nabla \times \vec{G} = 2\hat{k}$$

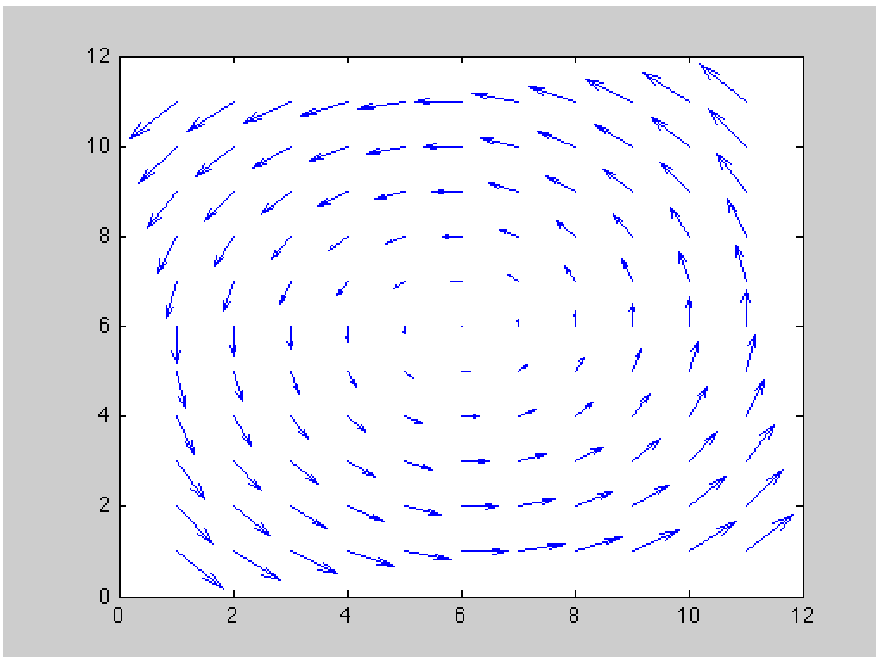

Figura 11. Rotacional de un campo vectorial.

De los resultados anteriores se puede concluir que si un campo vectorial rota no diverge y viceversa. Por lo que, se esperaría que $\nabla \cdot \vec{G} = 0$. Igualmente, que $\nabla \times \vec{F}_1 = 0$ y $\nabla \times \vec{F}_2 = 0$.

En dinámica de fluidos y en electromagnetismo es muy importante identificar el comportamiento de un campo vectorial. Esto con el fin de interpretar los posibles efectos de dichos campos. Los campos son una herramienta muy común para estudiar las fuerzas eléctricas, magnéticas o gravitacionales. Las consecuencias entre que un campo tenga divergencia o rotacional, son importantes en el contexto de la física. Por ejemplo, un campo que tiene divergencia diferente de cero, es un campo de fuerzas conservativo. Dos casos comunes de esto, son el campo eléctrico y el campo gravitacional. En cambio, si el campo tiene divergencia igual a cero y rotacional distinto de cero, el campo no es conservativo, como sucede con el campo magnético.

Dentro de la teoría electromagnética, existen las famosas **Ecuaciones de Maxwell**, las cuales se encuentran en forma diferencial o en forma integral. En esta teoría es cotidiano usar campos de fuerzas, y representarlos mediante los operadores divergencia o rotacional.

Te invito a que leas y revises el *Capítulo 16. Cálculo vectorial* del libro “Cálculo multivariable” de Stewart (2002). En este texto encontrarás una excelente exposición de la teoría de campos vectoriales. En la introducción del capítulo 16, podrás observar algunas de las aplicaciones de los campos vectoriales. Igualmente, podrás observar gráficas de campos vectoriales en el espacio.

Actividades

La elaboración de las actividades estará guiada por tu figura académica, mismo que te indicará, a través de la *Planificación de actividades de tu figura académica*, la dinámica que tú y tus compañeros (as) llevarán a cabo, así como los envíos que tendrán que realizar.

Para el envío de tus trabajos usarás la siguiente nomenclatura: BCMV_E2_U1_XXYZ, donde BCMV corresponde a las siglas de la asignatura, U2 es la unidad de conocimiento, A1 es el número de actividad, el cual debes sustituir considerando la actividad que se realices, XX son las primeras letras de tu nombre, Y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno.

Autorreflexiones

Para la parte de **autorreflexiones** debes responder las *Preguntas de Autorreflexión* indicadas por tu figura académica y enviar tu archivo. Cabe recordar que esta actividad tiene una ponderación del 10% de tu evaluación.

Para el envío de tu autorreflexión utiliza la siguiente nomenclatura: BCMV_U2_ATR _XXYZ, donde BCMV corresponde a las siglas de la asignatura, U2 es la unidad de conocimiento, XX son las primeras letras de tu nombre, y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno.

Cierre de la Unidad

A lo largo de esta Unidad has podido adentrarte en los conceptos de curvas de nivel de una función de dos variables al proyectarla sobre su dominio. Calculaste los máximos y mínimos de funciones de dos variables. También, obtuviste el gradiente de funciones escalares y graficaste los vectores resultantes para obtener campos gradientes.

Al definir las operaciones vectoriales del producto escalar y vectorial en la primera Unidad, ahora has podido calcular la divergencia y el rotacional de algunos campos vectoriales. Estos campos pueden ser graficados en dos y tres dimensiones, y has podido corroborar que cuando un campo vectorial diverge, su rotacional es igual a cero y viceversa. En el caso de la divergencia de un campo, el signo negativo indica que todos los vectores van hacia el centro mientras que el signo positivo significa que todos se alejan del centro hacia infinito.

Para saber más

Para saber más se recomiendan las siguientes fuentes de información. Todas estas páginas contienen materiales complementarios o videoclases que apoyan el aprendizaje de algunos de los conceptos estudiados en esta Unidad.

Derivadas parciales con funciones de dos variables
En este video podrás encontrar una videoclase para poder calcular las derivadas parciales de una función de dos variables.

Derivación logarítmica parte 1
En esta liga encontrarás una videoclase referente al cálculo de la derivada de la función logarítmica y usando las propiedades del logaritmo.

Regla de la cadena parte 1
Este video ilustra cómo usar la regla de la cadena para el cálculo de derivadas de funciones compuestas.

Interpretación física del rotacional
Este video presenta una exposición para el cálculo del rotacional de un campo vectorial y su interpretación física.

Las Ecuaciones de Maxwell
En este video encontrarás una interesante historia sobre las ecuaciones de Maxwell. Es importante saber que estas ecuaciones son una de las aplicaciones más importantes del cálculo multivariado a la Física.

Teoría de campos escalares y campos vectoriales

Este documento contiene una breve exposición sobre la teoría de campos escalares y campos vectoriales.

Courant R., et al., (2006) *¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* México. Fondo de Cultura Económica.
En este libro podrás encontrar algunos tópicos estudiados en esta Unidad. No es un libro de texto propiamente, más bien es un libro conceptual e histórico de matemáticas. Es además un clásico de la divulgación de las matemáticas.

Fuentes de consulta

1. Del Barrio, et al. (2006). *Termodinámica básica. Ejercicios*. Universidad Politécnica de Catalunya. Ediciones UPC.
2. Marsden, J. E., et al. (2004). *Cálculo Vectorial*. España: Pearson-Addison Wesley.
3. Moreno-Mestre J. (2008). *Problemas y ejercicios resueltos de termodinámica*. Universidad Complutense de Madrid.
4. Ramírez, Duque-Daza y Garzón-Alvarado et al. (2011). *Modelo computacional preliminar de la formación de la superficie cerebral*. Revista Cubana de Investigaciones Biomédicas.
5. Stewart, J., (2006). *Cálculo. Conceptos y Contextos*. México: Thomson.
6. Zill, D.G., y Wright, W.S. (2012). *Matemáticas 3. Cálculo de Varias variables.* México: McGraw-Hill.