Programa de la asignatura:

Cálculo multivariado

U3 Cálculo integral vectorial

DCSBA

BIOTECNOLOGÍA

Índice

Presentación de la Unidad

En esta Unidad se describen los conceptos básicos de la **integral**, pero extendidos al caso de funciones de dos o más variables. Particularmente, estudiarás integrales de línea, dobles y triples. La idea es calcular áreas y volúmenes. Asimismo, tendrás la posibilidad de aplicar el concepto de integral para encontrar la intensidad de flujo a través de una superficie de un campo vectorial.

Los resultados más importantes del cálculo multivariado serán estudiados cuando resuelvas problemas usando los **teoremas de *Green, Gauss*** *y* ***Stokes***. Estos teoremas te ofrecerán atajos para calcular nuevamente volúmenes, áreas, e integrales de línea, que de otra forma requieren de una mayor cantidad de cálculos algebraicos. Las aplicaciones a las ciencias e ingenierías, de los teoremas mencionados serán también discutidas al realizar problemas aplicados en electromagnetismo y termodinámica.

Por otra parte, será de gran ayuda tener a la mano un listado de fórmulas de integración, ya que las fórmulas que fueron establecidas en el cálculo de una variable para integrar, seguirán siendo útiles en cálculo multivariado.

Te invito a disfrutar y a aprender de esta parte de curso, pues las competencias que adquirirás te serán muy útiles al ejercer la ingeniería en biotecnología.

Propósitos

El estudio de esta Unidad te permitirá:

- Identificar el concepto geométrico de la integral de una función.
- Calcular algebraicamente integrales de línea en el contexto de campos vectoriales.
- Resolver integrales de línea, área y volumen en la solución de problemas.
- Calcular flujos de campos vectoriales a través de superficies cerradas.

Competencia específica

Analizar expresiones vectoriales a través de los métodos del álgebra y cálculo vectorial con operadores diferenciales: gradiente, divergencia y rotacional; así como el cálculo de funciones de varias variables, las integrales vectoriales y sus teoremas integrales; para aplicarlos en modelos físico-matemáticos resolubles de fenómenos y sistemas de la ingeniería.

3.1 Integrales de línea

La definición de la integral de una función ha sido ampliamente explotada en una gran cantidad de aplicaciones. El estudio de este concepto te ofrecerá ventajas importantes, pues te permitirá calcular áreas y volúmenes sobre cualquier superficie, no importando qué tan irregular esta sea. Antes de abordar estos casos, comencemos con el estudio de un tipo de integral, la llamada **integral de línea**; la cual tiene aplicaciones en el cálculo de ciertas cantidades escalares, a partir de cantidades vectoriales. Un ejemplo de ello, es el trabajo que realiza un campo conservativo sobre un objeto que se mueve dentro de él. Particularmente, las aplicaciones de estos conceptos son usados en electrostática y en mecánica clásica.

3.1.1 Evaluación de integrales de línea

Análogamente al procesamiento de una variable, en cálculo multivariado podrás determinar un amplio tipo de integrales. Particularmente, deseamos calcular la **integral de línea** de una función $f(x,y)$ dada, esto se logra mediante la parametrización de las variables de la función $f(x(t),y(t))$, en donde el parámetro $t \in [a,b]$. Ahora, propongamos una fórmula para resolver la integral de línea de la función mencionada:

$$\int_C f(x,y)dS = \int_a^b fx(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

donde C representa el contorno sobre el cual se calcula la integral. Esta fórmula te será de gran utilidad en el momento de calcular la integral del ejemplo que se muestra a continuación:

Ejemplo 1
Evalúe la integral de línea

$$\int_C (2+x^2)\, dS,$$

donde C es la mitad superior del círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$

Antes de desarrollar la integral observemos la curva de la función, la cual se puede ver en la **figura 1**.

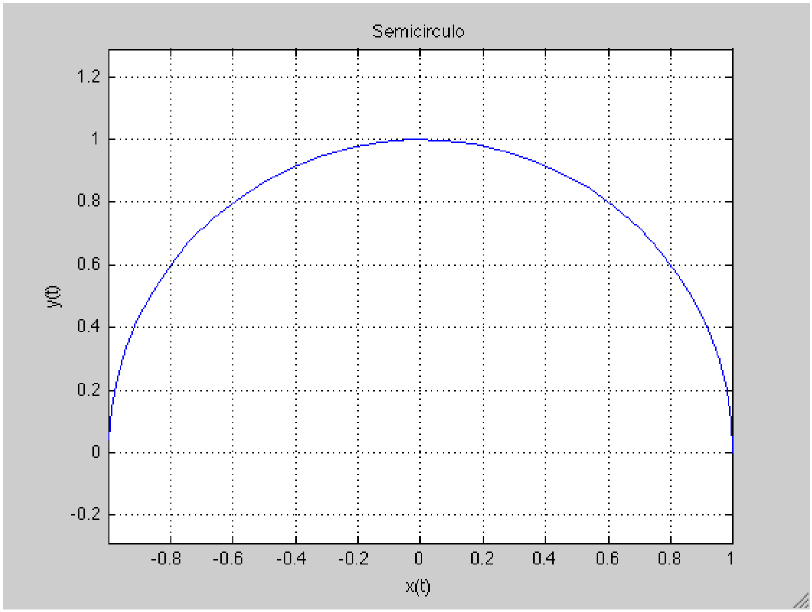

Figura 1. Mitad superior de un círculo de radio unidad.

Comencemos ahora con la integral. Sabemos que para un círculo unitario, $x = \cos t$ y$y = \sin t$. Asimismo, usando la fórmula propuesta, tenemos que:

$$\int_C (2 + x^2 y)\, dS = \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t)\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt$$
$$= 2\pi + \frac{2}{3}$$

Este último resultado nos permite saber el valor de la integral sobre el contorno propuesto.

3.1.2 Curvas planas e integrales de línea

El concepto de integral de línea será ampliado a campos vectoriales, lo que te dará nuevas herramientas de gran utilidad para el estudio de las ciencias y la ingeniería. Supongamos entonces que tenemos un campo vectorial continuo $\vec{F}$, definido sobre una curva plana suave C dada por la función vectorial$\vec{r}(t)$, para $a \leq t \leq b$. Entonces la integral de línea de$\vec{F}$, a lo largo de C es

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{r}\overrightarrow{dr} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'dt = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

Un ejemplo concreto del uso de esta definición se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.

Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerza

$$\vec{F}(x, y) = x^2\hat{\imath} - xy\hat{\jmath},$$

al mover una partícula a lo largo del cuarto de círculo$\vec{r}(t) = \cos t\, \hat{\imath} + \sin t\, \hat{\jmath}$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

La gráfica dela trayectoria de una partícula dentro de un campo de fuerza se puede observar en la **figura 2**. Nuevamente, $x = \cos t$ y $y = \sin t$.

Así que

$$\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) = \cos^2 t\, \hat{\imath} - \cos t \sin t\, \hat{\jmath},$$
$$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\, \hat{\imath} + \cos t\, \hat{\jmath}.$$

El trabajo realizado es

$$\int_C \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-2\cos^2 t \sin t\big)\, dt$$
$$= 2\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

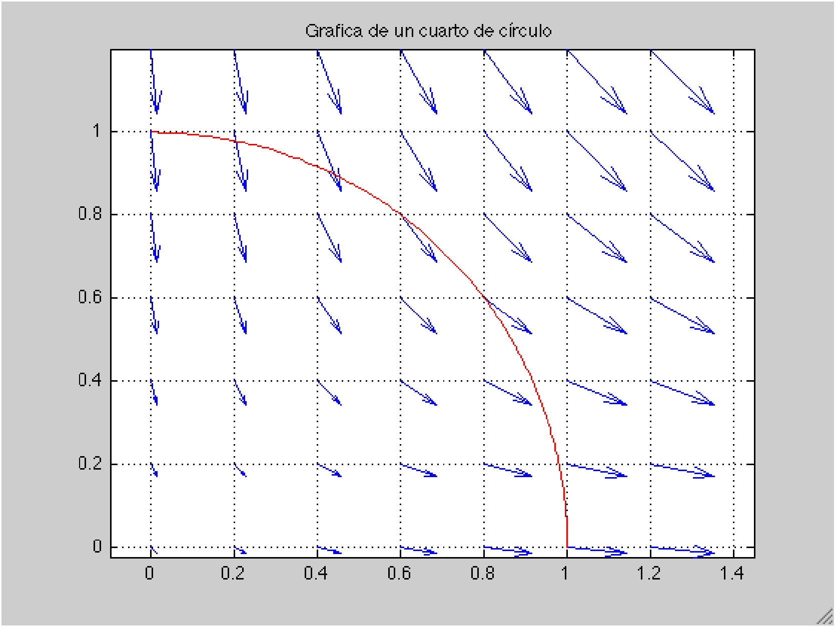

Figura 2. Trayectoria de una partícula en un campo de fuerza.

En este primer tema hemos dado por hecho que, como estudiante de cuarto semestre, conoces las fórmulas de integración algebraicas básicas. Estas reglas son de fácil acceso en casi todos los libros de cálculo, tanto de una variable como de varias variables. Por lo que se te recomienda hacer un listado de estas a manera de formulario personal.

El tema estudiado es muy útil para la comprensión de conceptos relacionados con flujos y para la continuación de los temas siguientes. Deberás revisar la teoría sobre integración de funciones de una variable para un mayor entendimiento de todos los conceptos.

Para ampliar la información revisa el texto de Stewart (2002), Capítulo 16. *Cálculo Vectorial* de las páginas 1040-1121. Este texto es muy recomendable, sobre todo para la aplicación del cálculo multivariado en problemas de las ciencias e ingeniería.

Asimismo, un buen texto es el de Zill, D.G., et al. (2012), Capítulo 5. *Integrales Múltiples* de las páginas201-251.Este texto cuenta con una exposición muy concreta sobre el tema de integrales de línea. Los ejercicios son ilustrativos de los casos típicos sobre el tópico estudiado.

3.2 Dobles y triples integrales

El concepto más básico de la integral de una función en cálculo de una variable, subyace en el hecho de poder determinar el área bajo la curva de dicha función. Esto se logra cuando se calculan una infinidad de áreas de rectángulos, cuyas bases se encuentran sobre el eje X. Cada área del rectángulo a partir de una partición realizada al dominio (a,b) de la función $f(x)$. En el esquema se muestran dos particiones sobre el dominio $(0,60)$ realizadas a la función $f(x)=x^2$.

3.2.1 Integrales de superficie

En el caso de funciones de dos variables, típicamente, el cálculo del volumen se logra mediante una partición adecuada del dominio de la función. Esto generará un conjunto de paralelepípedos en general, a los cuales se les podrá calcular a cada uno de ellos su volumen, para así obtener el volumen total de sólido formado entre la superficie de la función y el dominio de esta, en el entendido de que el dominio está bien definido y la función es continua al menos a trozos. Un esquema de esta situación se presenta en la siguiente gráfica que aparece en tres dimensiones. Las particiones mencionadas son formalmente llamadas particiones de *Riemann* y pueden ser llevadas a cabo incluso sobre la superficie de la función.

Estas herramientas matemáticas se ocupan también para calcular el área que se forma entre dos curvas en el plano cartesiano. Un ejemplo de ello se muestra a continuación en las **figuras 3 y 4**:

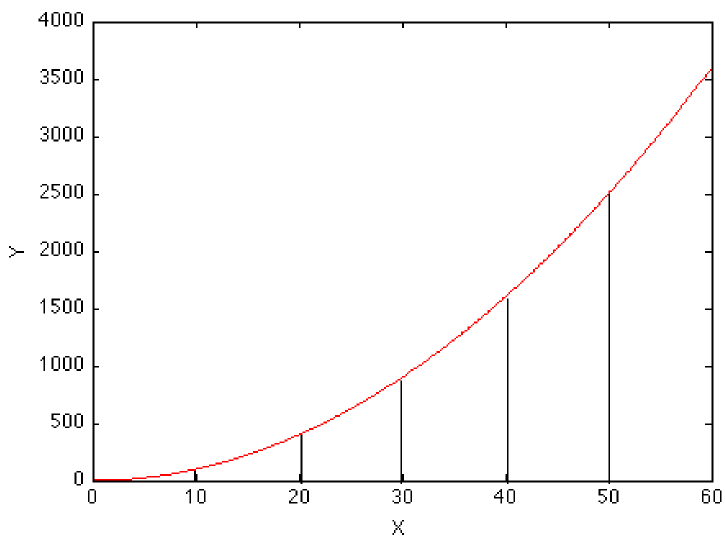

Figura 3.

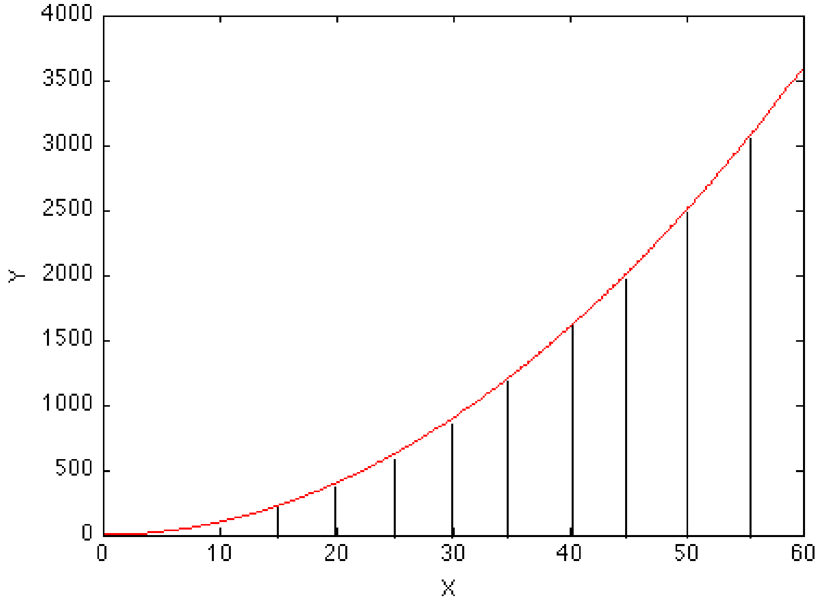

Figura 4.

Particiones del dominio de la función $f(x)$, en la primera gráfica, la base de cada rectángulo es muy ancha y producirá un error mayor en el cálculo del área bajo la curva de la función. En el segundo caso, se ha reducido la base de cada rectángulo disminuyendo el error (**figuras 5 y 6)**.

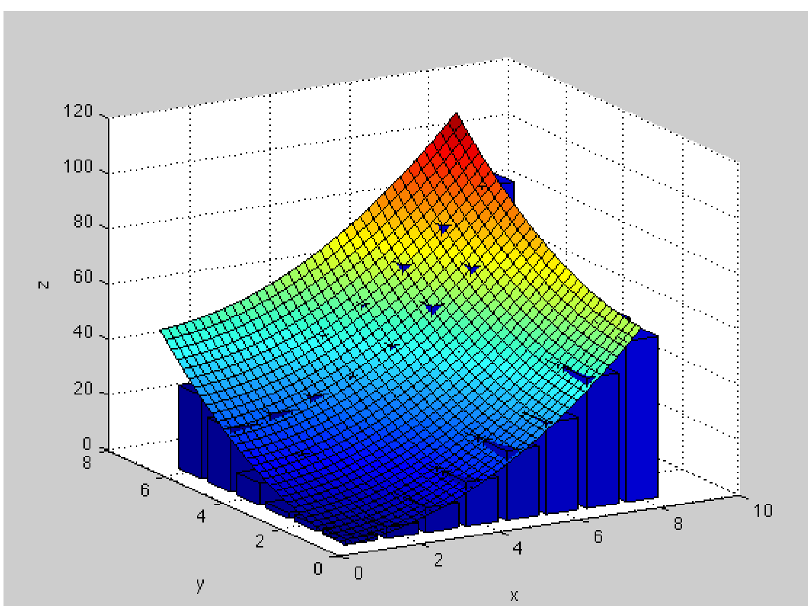

Figura 5.

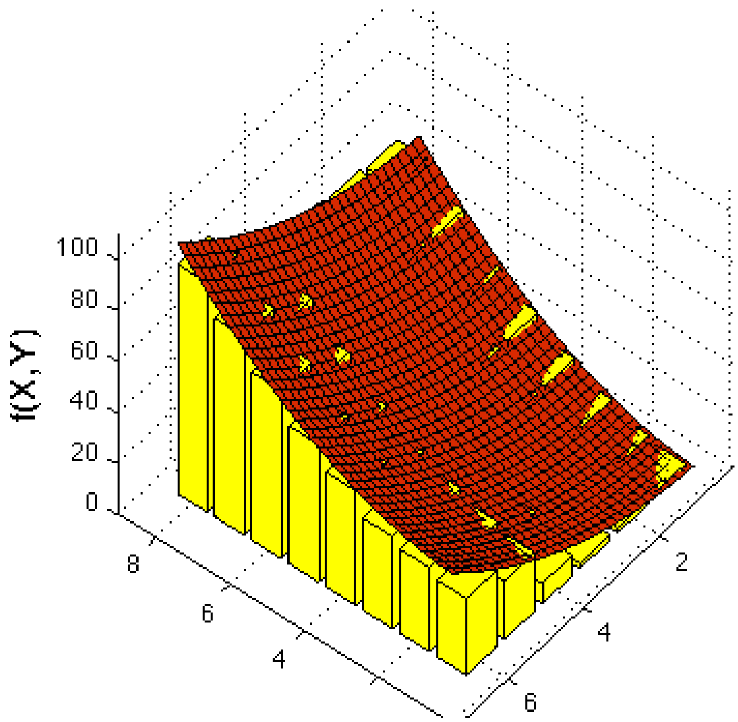

Figura 6.

Superficie de una función $f(x, y)$, bajo la cual aparecen particiones del dominio que forman paralelepípedos cuyo volumen contribuye al volumen total.

Ejemplo 3. Las curvas mostradas en el esquema están definidas por las funciones $y = 8 - x^2$ e $y = x^2$. Se desea encontrar el área entre las dos curvas, para ello se calcula la integral doble siguiente:

$$A = \iint_R dA = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{8-x^2} dy\, dx,$$

en donde R representa la región entre ambas curvas y dA el elemento diferencial de área.

Al observar los límites de integración de ambas integrales, se puede observar que en la variable $x$los límites son -2y2, mientras que sobre la variable vertical y, se tiene que ésta varía desde la curva$y = x^2$ hasta $y = 8 - x^2$ (ver **figura 7).**

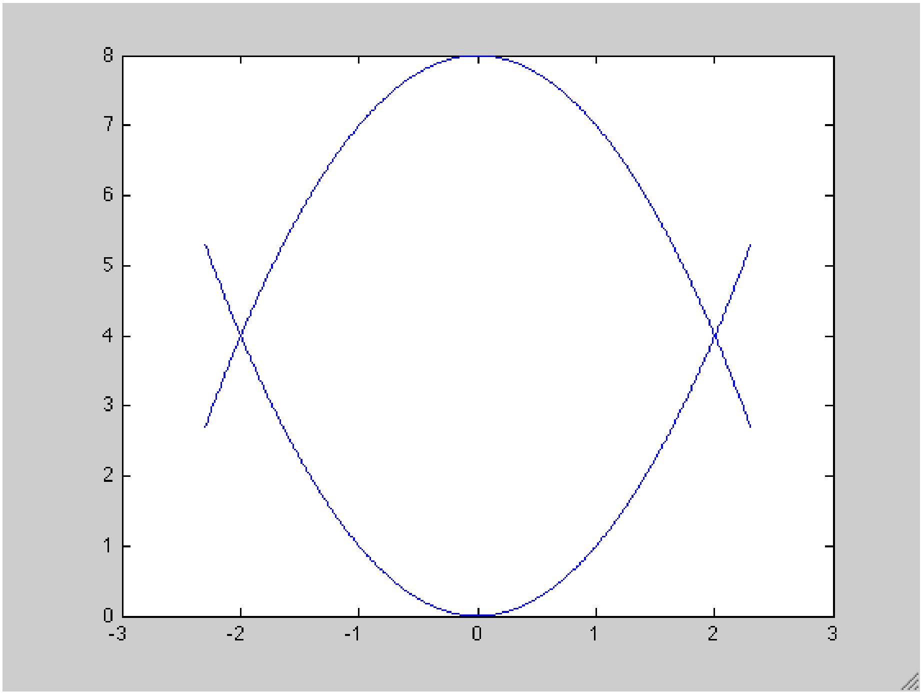

Figura 7. Área entre las curvas $y = 8 - x^2$ e $y = x^2$

Al llevar a cabo los cálculos se observa que el área entre ambas curvas es igual a $\frac{64}{3}$.

3.2.2 Integrales de volumen

Para el cálculo de un volumen también es útil la definición de la integral, la cual es ahora llamada integral triple.

Ejemplo 4. Evalúa la integral

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV \,,$$

donde E es la región de integración limitada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$y el plano $y = 4$.

Para evaluar la integral la región E se ilustra en la gráfica de la **figura 8**, asimismo se considera su proyección D sobre el plano $X - Y$ que es una región parabólica (**figura 9**).

Como $y = x^2 + z^2$ entonces $z = \pm\sqrt{y - x^2}$, de modo que la superficie de la frontera inferior de E es $z = -\sqrt{y - x^2}$ y la superficie superior es $z = \sqrt{y - x^2}$. Por tanto, la descripción de E es;

$$E = \left\{(x, y, z)\middle| -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4,\ -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\right\}.$$

Por lo que obtenemos

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dz\, dy\, dx$$

Otra forma es usando la proyección de E sobre el plano X-Z. Una segunda proyección de la parábola se muestra como una circunferencia de radio $r = 2$, donde el plano de proyección es X-Z (**figura 10)**. Esta segunda proyección dará pie a la siguiente integral,

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy\, dz\, dx = \frac{128\pi}{15}.$$

Para concluir el cálculo anterior se requiere del uso de coordenadas polares.

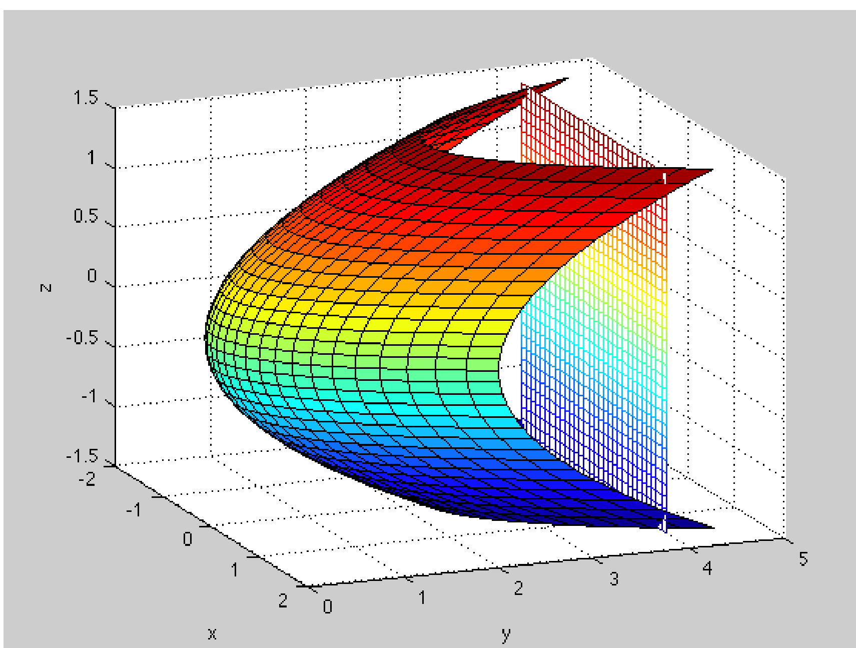

Figura 8. Región de integraciónE.

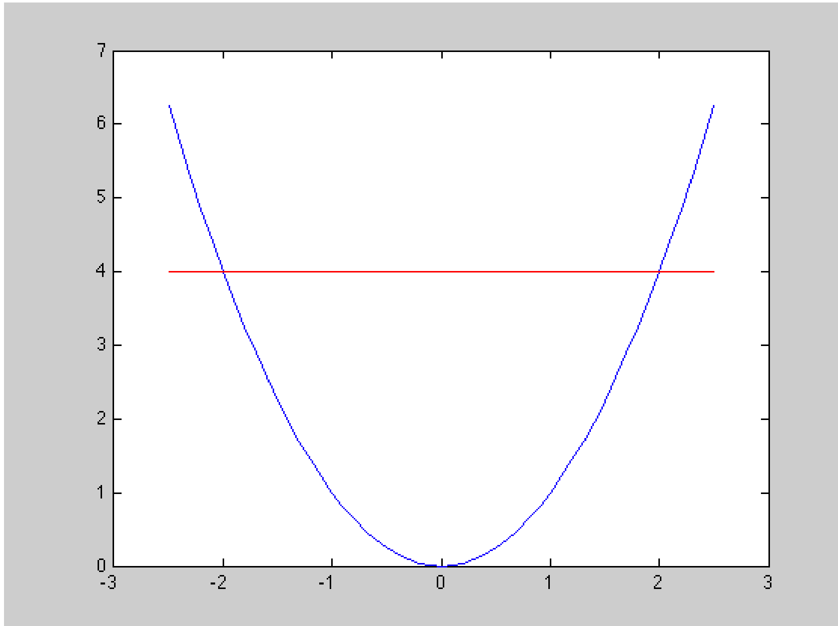

Figura 9. Proyección Dsobre el plano X-Y.

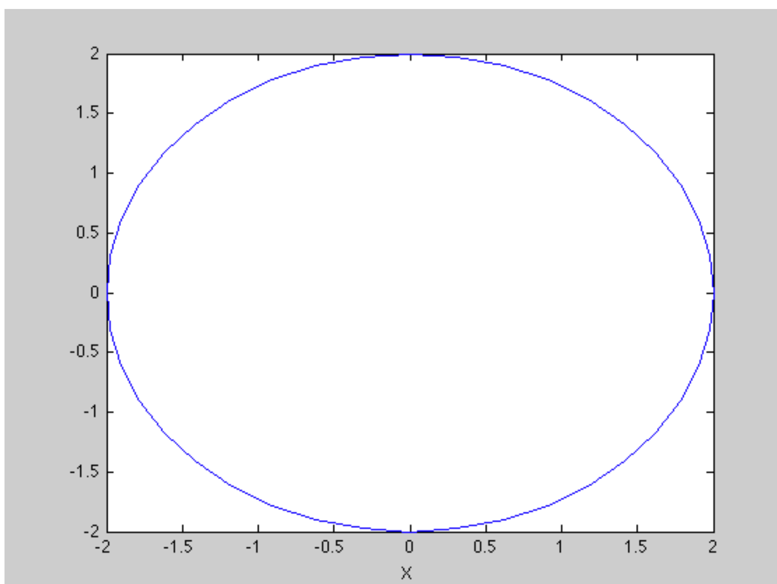

Figura 10. Segunda proyección de E sobre el plano $X - Z$.

El cálculo de integrales dobles y triples requiere básicamente de tus habilidades en la integración de funciones de una variable y del manejo de las operaciones algebraicas requeridas, por lo que no olvides revisar todas las fórmulas conocidas sobre integración.

El cálculo de integrales dobles y triples es de mucha utilidad en diferentes áreas de las ciencias y la ingeniería, por lo que te sugiero realizar el mayor número de problemas que te sea posible.

Para ampliar la información te recomiendo que **leas** del texto de Stewart, (2002), capítulo 15, *Integrales Múltiples*, páginas 1012-1013.Este texto es muy recomendable, sobre todo para la aplicación del cálculo multivariado en problemas de las ciencias e ingeniería. Tiene diversas gráficas y el uso del color ilustra la comprensión de los temas expuestos. Los problemas que se realizan en esta Unidad tienen un grado importante de complejidad. Se recomienda reproducir los problemas en el cuaderno de notas y llevar un registro de los problemas hechos.

3.3 Teoremas integrales

En la Unidad dos se estudió cómo calcular la divergencia y rotacional de campos vectoriales. Ahora en esta parte de la Unidad tres, se calcularán algunos flujos a través de superficies cerradas en el espacio tridimensional. Tal es el caso de la esfera que contiene en su centro una fuente que origina un flujo de campo vectorial. Antes de estudiar el teorema de la divergencia, revisemos dos igualmente importantes teoremas del cálculo vectorial: el **teorema de Green** y el **teorema de Stokes**.

3.3.1 Teorema de Green

Sea $\boldsymbol{C}$ una curva suave a trozos, cerrada, simple y positivamente orientada del plano, y sea $\boldsymbol{D}$ la región limitada por $\boldsymbol{C}$. Si P y Q tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a $\boldsymbol{D}$, entonces

$$\iint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Ejemplo 5: En el ejemplo que se muestra en la gráfica de la **figura 11**, se pide que evaluar la siguiente integral

$$\int_C y^2\,dx + 3xy\,dy$$

Usando el **Teorema de *Green***, en donde D , es la mitad del anillo que se encuentra entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, en el semiplano superior, y C es su frontera.

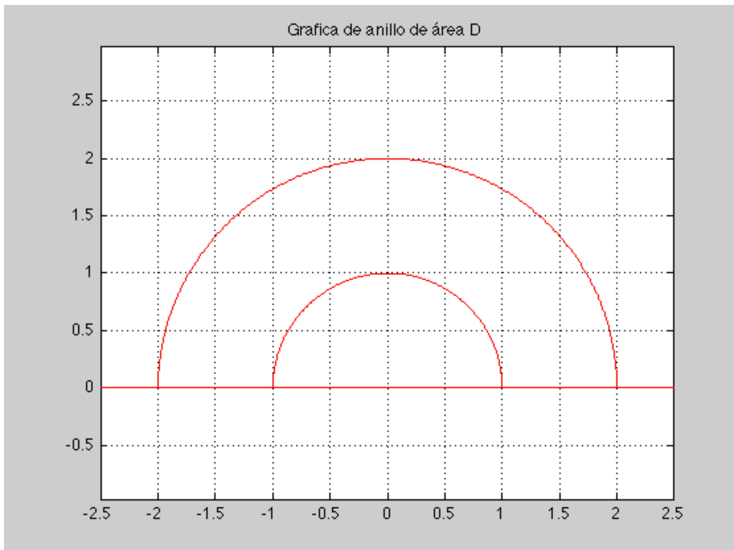

Figura 11. Mitad de un anillo formado entre los círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

$$D = \{(r, \theta)|1 \leq r \leq 2,\;\; 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Usando el Teorema de *Green* procederemos a calcular la integral,

$$\int_C y^2\,dx + 3xy\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA,$$

Donde se ha identificado a $P(x, y) = y^2$ y a $Q(x, y) = 3xy$. Al llevar a cabo las derivadas, tenemos que:

$$\iint_D y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^{2}(r\sin\theta)r\,dr\,d\theta = \frac{14}{3}.$$

3.3.2 Teorema de Stokes

El **teorema de Stokes** se muestra a través del uso de la gráfica del hemisferio de la figura siguiente.

Supongamos una superficie S suave a trozos y orientada, que está limitada por una curva frontera C, cerrada, suave a trozos y positivamente orientada. Sea también $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas, en una región abierta del espacio tridimensional que contiene a S. Entonces se cumple que,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

El teorema relaciona una integral de línea con una integral de superficie. En la **figura 12**se observa una media “naranja” como superficie S_1 y el contorno de su base es la curva C.

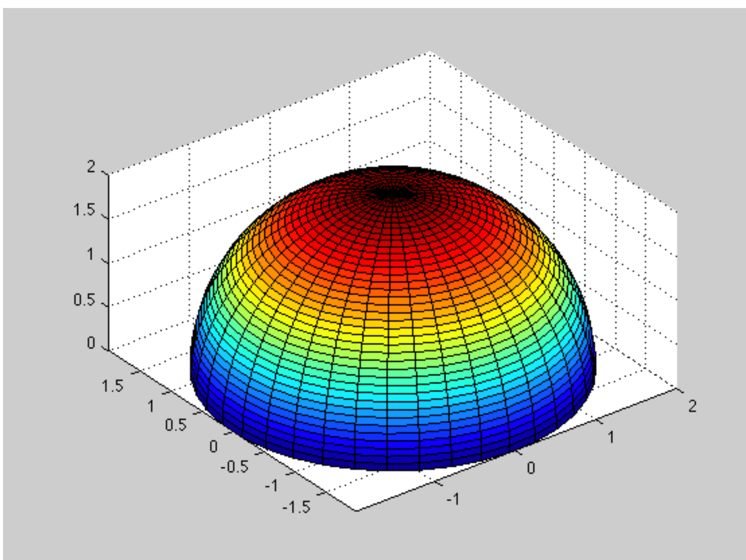

Figura 12. Hemisferio: Superficie S_1, el círculo inferior que rodea a la superficie es la curva C.

Ejemplo 6:
Supongamos que tenemos una segunda superficie S_2 como la mostrada abajo. La base de esta segunda superficie S_2 tiene un anillo C sobre el plano (en color verde) de igual perímetro al de la Superficie S_1. Por lo que si un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ pasará por ambas superficies se cumpliría que;

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

3.3.3 Teorema de Gauss

Como se dijo anteriormente, en electrostática el campo eléctrico de una carga puntual se puede representar mediante un campo de fuerzas cuya fuente es la propia carga eléctrica; dependiendo del signo de la carga, el campo puede ser radialmente divergente o convergente. Lo que implica que, la carga sea una fuente o un sumidero de campo eléctrico.

Ejemplo 7. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$ a través de la esfera unitaria$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (**figura 13).**

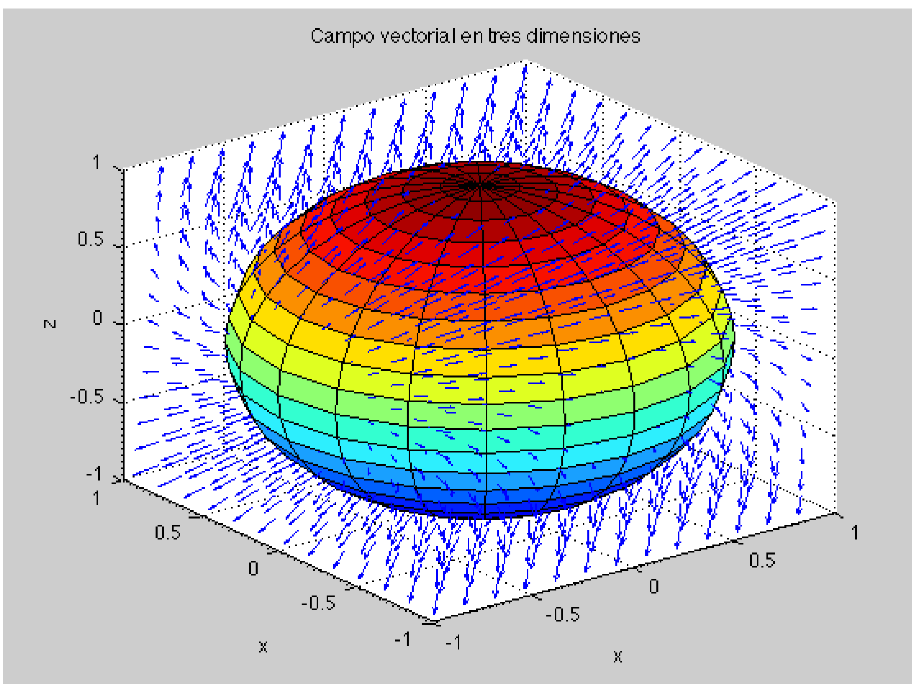

Figura 13. Campo vectorial de $\vec{F}(x, y, z) = z\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + x\hat{k}$, a través de la superficie de una esfera.

La solución a este problema se consigue usando la definición para la **integral de superficie de un campo vectorial $\vec{F}$ sobre$S$**.

Por lo que sea $\vec{F}$un campo vectorial continuo a través de una superficie Scon vector unitario normal$\hat{n}$, se define la integral de superficie mediante,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, \overrightarrow{dS}.$$

Esta integral se llama flujo de $\vec{F}$ a través de $\boldsymbol{S}$.

Usando el **Teorema de Gauss o de la divergencia**,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S div\, \vec{F}\, \overrightarrow{dV}.$$

El cual convierte una integral de superficie en una integral de volumen. Por lo que

$$div\, \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} z + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} x = 1.$$

Al sustituir este resultado en la integral

$$\iiint_V 1\, dV = \frac{4}{3}\pi\,(1)^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

Otra forma de calcular esta misma integral es por el método de integrales de superficie.

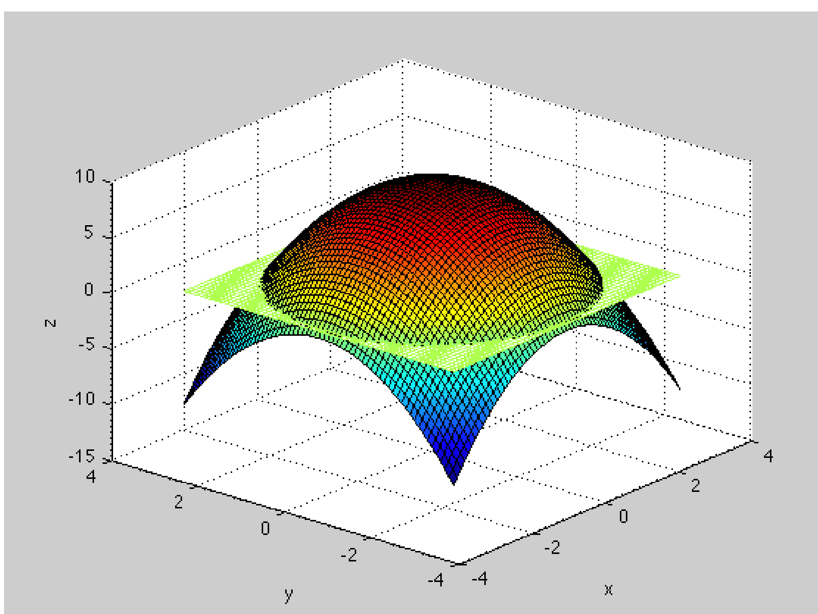

Figura 14. Superficie S_2 de la función $z = 9 - x^2 - y^2$, con el mismo contorno C.

Esto significa que no importa el área de la superficie, siempre y cuando el contorno tenga las mismas dimensiones, una integral de superficie sobre un campo vectorial es siempre la misma (**figura 14)**.

Para poder controlar los conceptos estudiados en esta Unidad se te recomienda que lleves a cabo los ejercicios de la **actividad 3** de la tercera Unidad. En los textos recomendados encontrarás más casos de integrales línea, integrales dobles y triples. Así como el uso de los teoremas de *Green, Gauss y Stokes* aplicados a campos vectoriales.

Revisa el capítulo 13, Integración múltiple del libro *El cálculo* de Louis Leithold, (2006), en él podrás encontrar una discusión con ejemplos sobre integrales dobles y triples. Este texto es recomendable cuando las bases del cálculo de una variable no están bien cimentadas en el estudiante. Los primeros capítulos están dedicados justamente al cálculo de una variable y la segunda parte del libro al cálculo multivariado. Es un libro clásico en las Facultades de ciencias e ingeniería, y el número de impresiones índica que ha sido ampliamente revisado. Se sugiere como libro de consulta, cuando algunos de los conceptos no queden bien comprendidos en los textos anteriores.

Actividades

La elaboración de las actividades estará guiada por tu docente en línea, mismo que te indicará, a través de la *Planificación de actividades*, la dinámica que tú y tus compañeros (as) llevarán a cabo, así como los envíos que tendrán que realizar.

Para el envío de tus trabajos usarás la siguiente nomenclatura: BCMV_U3_A1_XXYZ, donde BCMV corresponde a las siglas de la asignatura, U3 es la unidad de conocimiento, A1 es el número de actividad, el cual debes sustituir considerando la actividad que se realices, XX son las primeras letras de tu nombre, Y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno.

Autorreflexiones

Para la parte de **autorreflexiones** debes responder las *Preguntas de Autorreflexión* indicadas por tu docente en línea y enviar tu archivo. Cabe recordar que esta actividad tiene una ponderación del 10% de tu evaluación.

Para el envío de tu autorreflexión utiliza la siguiente nomenclatura: BCMV_U3_ATR _XXYZ, donde BCMV corresponde a las siglas de la asignatura, U3 es la unidad de conocimiento, XX son las primeras letras de tu nombre, y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno.

Cierre de la Unidad

A lo largo de esta Unidad has podido adentrarte en los conceptos de integrales de línea, área y volumen. Al mismo tiempo se estudiaron integrales de superficie usando el **Teorema de la Divergencia de Gauss.** Otro teorema empleado fue el de **Green** para encontrar el área entre dos curvas. Un tema que resulta fascinante es aquel de encontrar el flujo de un campo vectorial a través de una superficie. El caso de la superficie esférica es clásico y muy usado en la **Ley de Gauss** de la electrostática. Nuevamente, como ya lo hemos mencionado, los conceptos estudiados hasta aquí te serán muy útiles para entender los **teoremas de Gauss, Green y Stokes**, los cuales permiten que las **Ecuaciones de Maxwell** puedan ser escritas en su forma integral.

En otros contextos como en biotecnología, el uso del cálculo vectorial te será de gran ayuda para comprender fenómenos de transporte. En termodinámica el cálculo vectorial es ampliamente usado para comprender los conceptos de entropía, entalpía y la solución de problemas con sistemas termodinámicos, como por ejemplo el gas ideal.

Para saber más

Courant, R., et al. (2006) *¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales.* México: Fondo de Cultura Económica.

Para reforzar el concepto de integral de línea busca el siguiente video:

- Independencia de la trayectoria en una integral de línea.

Para reforzar el concepto de integrales dobles y triples busca los siguientes videos:

- Volumen calculado con una Integral doble en Coordenadas Polares.
- Integral Triple.

Para reforzar el concepto de teorema de Green y Gauss busca los siguientes videos:

- Teoremas Green y Gauss.
- Teorema Electrostático de Gauss.

Se te sugieren también los siguientes videos:

- Centro de masa de una región plana
- Permeabilidad y la Ley de Darcy

Fuentes de consulta

1. Leithold, L., (2006). *El Cálculo*. México: Oxford.
2. Stewart, J., (1999). *Cálculo Multivariable*. México: Thompson.
3. Zill, D. G., et al. (2012). *Matemáticas 3. Cálculo de Varias variables.* México, D. F.: McGraw-Hill.