

Programa de la asignatura:

Variable compleja

U4

Mapeo conforme y aplicaciones



DCSBA



BIOTECNOLOGÍA



Índice

Presentación de la Unidad	2
Propósitos de la Unidad	2
Competencia específica	3
4.1. Definición de transformaciones y aplicaciones conformes.....	3
4.1.1. Teorema de aplicación de Riemann.....	3
4.1.2. Algunas transformaciones generales: Traslación, Rotación, Estiramiento, Inversión.....	5
4.1.3. Transformaciones de Schwarz-Christoffel.....	5
4.1.4. Algunas transformaciones especiales.....	6
4.2. Aplicaciones físicas de las transformaciones conformes.....	9
4.2.1. Problemas de valores de frontera	9
4.2.2. Problemas de Dirichlet y de Neumann.....	10
4.2.3. Problema de Dirichlet para la circunferencia unitaria. Fórmula de Poisson.....	10
4.2.4. Problema de Dirichlet para el semiplano.....	11
4.3. Aplicaciones físicas de las transformaciones conformes II	12
4.3.1. Soluciones a los problemas de Dirichlet y de Neumann mediante transformaciones conformes.....	12
4.3.2. Aplicaciones al flujo de fluidos del problema de Dirichlet.....	13
4.3.3. Teoremas: Bernoulli, Blasius, Gauss.....	15
4.3.4. Potenciales electrostáticos complejos y temperatura compleja.....	16
Actividades	17
Autorreflexiones.....	17
Cierre de la Unidad	17
Fuentes de consulta	18



Presentación de la Unidad

En esta nueva Unidad estudiarás la teoría básica sobre el mapeo conforme. Esta es una operación muy importante entre funciones de la variable compleja y permite encontrar relaciones entre diferentes planos complejos. Las aplicaciones del mapeo conforme se encuentran en el área de flujo de fluidos, muy usados en esta carrera.

Se espera que tales razones te motiven y que estas nuevas herramientas matemáticas adquiridas a lo largo de esta cuarta Unidad, faciliten tu acceso a nuevas aplicaciones en las ciencias e ingeniería.

Disfruta y aprende de esta parte del curso, pues los conceptos te generarán competencias que te serán de mucha utilidad en las diferentes aplicaciones de la ingeniería en biotecnología.

Propósitos de la Unidad



El estudio de esta Unidad te permitirá:

- Resolver problemas usando transformaciones y aplicaciones conformes.
- Resolver problemas de las ecuaciones diferenciales con valores en la frontera.
- Resolver problemas en el contexto de la mecánica de fluidos usando los teoremas de Bernoulli, Blasius y Gauss.



Competencia específica



Analizar las técnicas de representación y solución de modelos físico-matemáticos empleando transformaciones conformes para su disposición y solución en contextos específicos de la ingeniería.

4.1. Definición de transformaciones y aplicaciones conformes

Un tópico que resulta interesante de estudiar en esta Unidad, es el referido al mapeo conforme o transformación conforme. Una transformación de este tipo es una función que preserva los ángulos. El caso más común que se puede encontrar es la función que relaciona dos dominios del plano complejo.

Una transformación es un cambio de variables o un cambio de sistema coordenado o un cambio de base. Estas transformaciones obedecen ciertas reglas que serán discutidas a lo largo de esta Unidad. También serán estudiados algunos casos típicos de transformaciones conformes.

4.1.1. Teorema de aplicación de Riemann

Sea C una curva simple cerrada que constituye la frontera de una región $\mathcal{R}$ conexa simple, en el plano complejo z . También sea C' una circunferencia de radio uno, con centro en el origen, que constituye la frontera de una región $\mathcal{R}'$ en el plano imagen w . A la región $\mathcal{R}'$ se le suele llamar *disco unitario*.

Existe un teorema llamado Teorema de la aplicación de Riemann, el cual dice que existe una función $w=f(z)$ analítica en $\mathcal{R}$, que lleva a cada punto de $\mathcal{R}$ a un punto correspondiente en $\mathcal{R}'$ y a cada punto de C a un punto correspondiente a C' , la correspondencia es uno a



uno y sobre; esto es inyectiva y suprayectiva. Es decir, todo punto de $\mathcal{R}'$ es la imagen de exactamente un punto en $\mathcal{R}$.

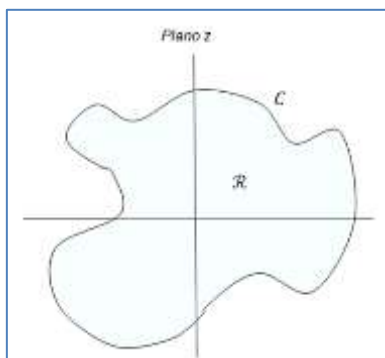


Figura 1. Plano arbitrario complejo Z .

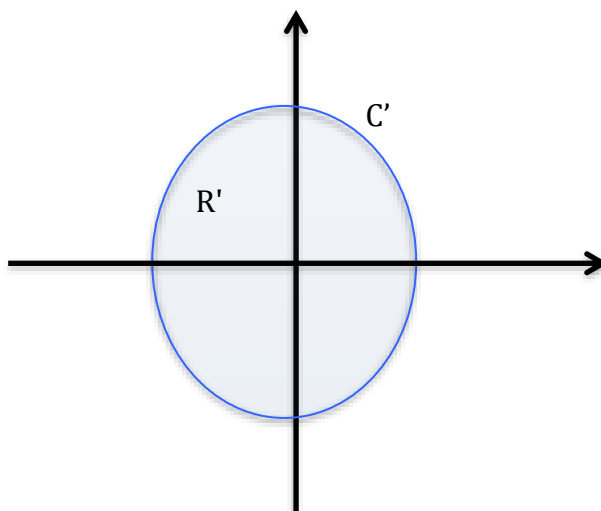


Figura 2. Plano imagen complejo W .

Esta función $f(z)$ tiene tres constantes reales arbitrarias, que se determinan al hacer que el centro de C' corresponda a algún punto dado de $\mathcal{R}$ y que un punto sobre C' corresponda a un punto dado sobre C . Hay que observar que aunque el teorema del mapeo de Riemann demuestra la *existencia* de esta función, en realidad no produce a esta función.

El teorema de aplicación de Riemann se extiende al caso en el que una región limitada por dos curvas simples cerradas, una dentro de la otra, se lleva a una región limitada por dos circunferencias concéntricas. Asimismo, toda región simplemente conexa que no sea



todo el plano X-Y se transforma en forma conforme a un disco unitario. Por ejemplo, el semiplano superior se lleva, de manera conforme, al disco unitario. Algunos casos como los comentados serán descritos en el subtema 4.1.4. Mientras tanto pasemos a definir algunas transformaciones generales en la siguiente sección.

4.1.2. Algunas transformaciones generales: Traslación, Rotación, Estiramiento, Inversión

Supongamos que las constantes, α , β son complejas y que a y θ_0 son constantes reales. Observemos las siguientes transformaciones:

Traslación, $w=z+\beta$

Con esta transformación, las regiones del plano z se *desplazan o trasladan* en dirección del vector β .

Rotación. $w = e^{i\theta_0}z$

- Con esta transformación, las regiones del plano z se rotan un ángulo θ_0 .
- Si $\theta_0 > 0$, la rotación es en sentido de las manecillas del reloj.

Estiramiento/elongación, $w=az$

Usando esta transformación, las regiones del plano z se alargan en la dirección de z . Si $a>1$ o $0<a<1$. La contracción se considera un caso especial del estiramiento.

Inversión, $w=1/z$

Finalmente, con esta transformación se logra una inversión.

4.1.3. Transformaciones de Schwarz-Christoffel

Asumamos un polígono en el plano w con vértices en $w_1, w_2, \dots, w_n$, cuyos ángulos interiores son respectivamente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Los puntos $w_1, w_2, \dots, w_n$ son, también respectivamente, las imágenes de los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ sobre el eje real del plano Z . Esto puede ser visto en los esquemas que a continuación se observan:

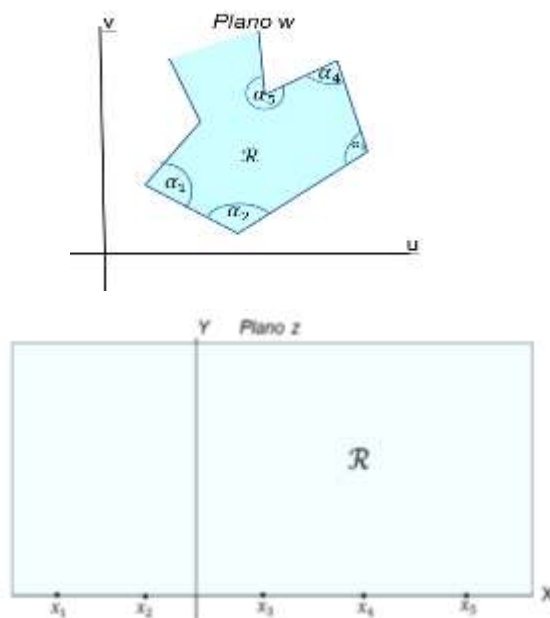


Figura 3.

Una transformación que lleva el semiplano superior $\mathcal{R}$ del plano z sobre el interior $\mathcal{R}$ del polígono en el plano w , y el eje real como frontera del polígono, viene dada en forma diferencial por:

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi-1}}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi-1}} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi-1}}$$

y en forma integral como:

$$w = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi-1}}(z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi-1}} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi-1}} dz + B$$

donde A y B son constantes complejas.

Se puede deducir lo siguiente a partir de la ecuación:

1. Tres de los puntos $x_1, x_2, \dots, x_n$ pueden elegirse arbitrariamente.
2. Las constantes A y B determinan el tamaño, orientación y posición del polígono.
3. Es conveniente elegir un punto al infinito, por ejemplo, x_n , en cuyo caso, en las expresiones el último factor no está presente.
4. Los polígonos abiertos infinitos se consideran como los límites de los polígonos cerrados.



4.1.4. Algunas transformaciones especiales

A continuación se presentan algunas transformaciones que en la práctica suelen ser muy útiles. Se describen ciertas transformaciones que llevan la región dada $\mathcal{R}$ del plano w o del plano z , sobre el semiplano superior del plano w o del plano z , al círculo de radio unidad en el plano z o en el plano w , de acuerdo con la transformación que más fácil sea posible llevar a cabo. Existe una transformación que mapea el semiplano superior sobre el círculo unitario, esta transformación se alcanza mediante la expresión:

A-1 Sector infinito de ángulo $\frac{\pi}{m}$

$$w = z^m, m \geq 1/2$$

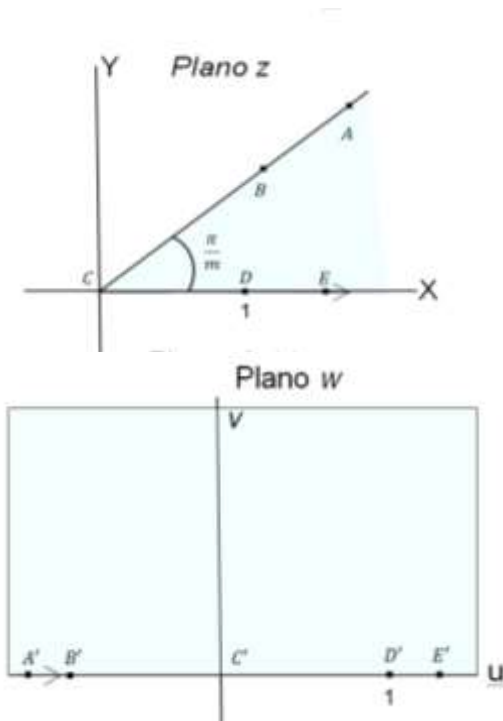


Figura 4.

Otros casos se presentan en donde, como en el caso anterior, se tiene una expresión algebraica que permite llevar a cabo la transformación.

A-2 Sector infinito de anchura α

$$w = e^{\pi z/\alpha}$$

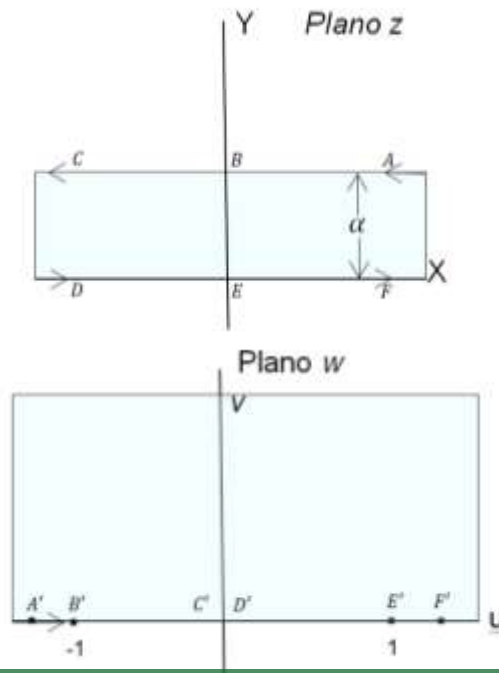


Figura 5.

A-3 Banda simiinfinita de anchura α

$$w = \operatorname{sen} \frac{\pi z}{a}$$

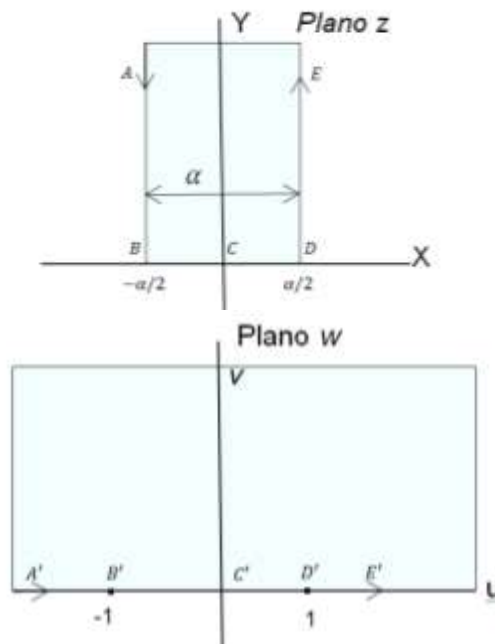


Figura 6.



A-4 Semiplano con semicírculo eliminado

$$w = \frac{a}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

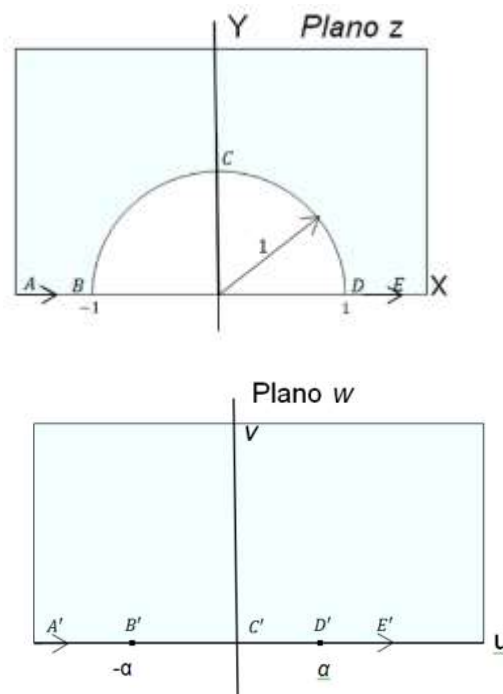


Figura 7.

4.2. Aplicaciones físicas de las transformaciones conformes

Algunos de los problemas comunes a resolver usando los métodos del mapeo conforme están fuertemente relacionados con problemas de valores en la frontera, cuyos ejemplos claros son el problema de Dirichlet y el de Neumann. Ambos tienen una estrecha relación con la ecuación de Laplace y permiten el entendimiento de áreas en electromagnetismo y flujo de fluidos.

4.2.1. Problemas de valores de frontera

En ingeniería, un sin fin de problemas, al formularse matemáticamente, conducen a *ecuaciones diferenciales parciales* y a condiciones relacionadas que se conocen como *condiciones de frontera*. El problema de hallar soluciones a ecuaciones diferenciales que satisfagan las condiciones frontera se conoce como *problema de valor frontera*. Desde el



punto de vista matemático, así como desde el punto de vista físico, es de fundamental importancia no solo hallar las soluciones a esto, es decir, que tales soluciones existan, sino que para cada problema debe haber sólo una solución, una solución **única**.

4.2.2. Problemas de Dirichlet y de Neumann

Supongamos que $\mathcal{R}$ es una región simplemente conexa limitada por una curva simple cerrada C , como la que se observa en la figura. Existen dos tipos interesantes de problemas de valor frontera. estos se pueden dividir en:

- **Problema de Dirichlet**, el cual trata de hallar una función Φ que satisfaga la ecuación de Laplace, esto es, que la función sea armónica en $\mathcal{R}$ y que sobre la frontera C tome ciertos valores ya designados.
- **Problema de Neumann**, el cual trata de hallar una función Φ que satisfaga la ecuación de Laplace en $\mathcal{R}$ y que en la frontera C su derivada normal $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ tome valores ya designados. Un esquema de la región se muestra en la siguiente figura:

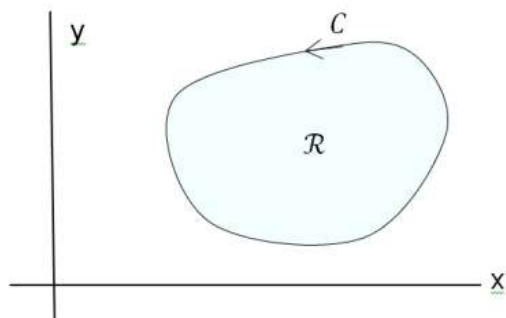


Figura 8. La región $\mathcal{R}$ puede ser no acotada. Por ejemplo, $\mathcal{R}$ puede ser el semiplano superior con el eje X como frontera de C . Puede que las soluciones, tanto al problema de Dirichlet como al de Neumann, existan y sean únicas [en el problema de Neumann, salvo una constante aditiva arbitraria] con muy ligeras restricciones impuestas a las condiciones frontera.

Es interesante que el problema de Neumann se presente en términos de un problema de Dirichlet, y también se resuelve (al menos de manera teórica) el correspondiente problema de Neumann.



4.2.3. Problema de Dirichlet para la circunferencia unitaria.

Fórmula de Poisson

Sea C la circunferencia unitaria $|z| = 1$ y $\mathcal{R}$ su interior. Una función que satisface la ecuación de Laplace [es decir, que es armónica] en todos los puntos (r, θ) en $\mathcal{R}$ y que toma en C un valor prefijado $F(\theta)$ [es decir, $\Phi(1, \theta) = F(\theta)$], está dada por:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)F(\phi)d\phi}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

Esta fórmula se conoce como fórmula de Poisson para la circunferencia.

Un ejemplo que puede mostrar el uso de la fórmula de Poisson se describe a continuación:

Determine la función armónica en el interior del círculo unitario $|z| = 1$. La función debe tomar los valores,

$$F(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 < \theta < \pi \\ 0 & \pi < \theta < 2\pi \end{cases}$$

Con la fórmula de Poisson se puede calcular la integral

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\phi)d\phi}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2}$$

Usando la función $F(\theta)$ en los intervalos $0 < \theta < \pi$ y $\pi < \theta < 2\pi$, y asumiendo que la función toma los valores, 1 y 0. Tenemos que

$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2} = 1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2r\sin\theta}{1 - r^2} \right)$$

Este es un problema clásico de Dirichlet para el círculo unidad, en el que es buscada una función que satisfaga la ecuación de Laplace.



4.2.4. Problema de Dirichlet para el semiplano

Una función que es armónica en el semiplano $y > 0$ [$\text{Im}\{z\} > 0$] y que toma un valor prefijado $G(x)$ en el eje x [es decir, $\Phi(x, 0) = G(x)$, $-\infty < x < \infty$], está dada por:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(\eta)d\eta}{y^2 + (x - \mu)^2}$$

Esto se llama fórmula de Poisson para el semiplano.

Como ejemplo de este caso, consideremos la función armónica en la mitad superior del plano z . Y que en el eje tome los valores

$$G(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

La fórmula de Poisson para el semiplano es una solución a este problema, esto mediante la solución de la integral siguiente

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(\eta)d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{y[0]d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y[1]d\eta}{y^2 + (x - \eta)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\eta - x}{y} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) = 1 - \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \end{aligned}$$

4.3. Aplicaciones físicas de las transformaciones conformes II

Las aplicaciones físicas del mapeo conforme se encuentran de manera natural en el contexto del flujo de fluidos, esto se debe al tipo de patrones que se generan después de llevar a cabo las transformaciones. Podemos obtener patrones de flujo que representen líquidos, gases o campos de fuerzas. También es común representar mediante mapeo conforme a algunos potenciales. Todos estos ejemplos son básicos para entender procesos de áreas afines a la biotecnología.

De manera particular, en este tema serán revisados los teoremas de Bernoulli, Blasius y Gauss. Estos teoremas son claves en el entendimiento de la teoría electromagnética y otras áreas de las ciencias físicas.



4.3.1. Soluciones a los problemas de Dirichlet y de Neumann mediante transformaciones conformes

Los problemas de Dirichlet y de Neumann son resueltos en toda región $\mathcal{R}$ simplemente conexa, que sea posible llevar de manera conforme mediante una función analítica sobre el interior del círculo unitario o de un semiplano. Esto de acuerdo con el teorema de la transformación de Riemann, lo cual siempre será posible, al menos en teoría.

Las ideas básicas se establecen aquí y son las siguientes:

- Transformar el problema del valor frontera para la región $\mathcal{R}$ en un problema correspondiente para la circunferencia unitaria o para el semiplano.
- Resolver el problema para la circunferencia unitaria o para el semiplano.
- Emplear la solución del inciso b), para resolver el problema dado mediante la transformación inversa.

Los teoremas importantes en este contexto son los siguientes:

1. Sea $w=f(z)$ una función analítica y uno a uno en la región $\mathcal{R}$ del plano z . Entonces existe una única función inversa $z=g(w)$ en $\mathcal{R}$, y $f'(z) \neq 0$ en $\mathcal{R}$. Esto último garantiza que la transformación sea conforme en todos los puntos de $\mathcal{R}$.

2. Sea $\Phi(x, y)$ armónica en $\mathcal{R}$, y suponga que $\mathcal{R}$, es uno a uno sobre $\mathcal{R}'$ en el plano w por medio de una transformación del tipo $w=f(z)$, en donde $f(z)$ es analítica. Entonces $f'(z) \neq 0$, $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$ y $\Phi(x, y) = \Phi[x(u, v), y(u, v)] \equiv \Psi(u, v)$ es una función armónica en $\mathcal{R}'$. Esto significa que una función armónica se transforma en otra función armónica por medio de una transformación del tipo $w=f(z)$, que es analítica.

3. Supón que $\Phi = a$ en la frontera o en parte de la frontera C de una región en el plano z . Entonces $\Psi = a$ en su imagen C' en el plano w . Similarmente, si la derivada normal de Φ es cero, es decir, $\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0$ en C , entonces en C' , la derivada normal de Ψ es también cero.

4.3.2. Aplicaciones al flujo de fluidos del problema de Dirichlet

En el contexto de muchos problemas importantes sobre el flujo de fluidos, conocido también como dinámica de fluidos, hidrodinámica o aerodinámica, es común emplear métodos de la variable compleja con las siguientes premisas:

- **El flujo de fluidos es bidimensional**, es decir, el patrón básico de flujo y las características del movimiento del fluido en un plano son esencialmente las mismas que en cualquier plano paralelo. Esto es necesario para concentrar la atención en un solo plano que se considere como el plano z . Los patrones



dibujados en este plano se entienden como secciones transversales de cilindros infinitos perpendiculares al plano. Un caso es la circunferencia que representa un obstáculo cilíndrico infinito, éste es solo un modelo matemático de un cilindro físico real tan largo que resulta razonable ignorar sus efectos.

- **El flujo es estacionario**, es decir, la velocidad del fluido en cualquier punto depende solo de las coordenadas espaciales (x, y) y no del tiempo.
- **Los componentes de la velocidad se obtienen de un potencial**, es decir, si V_x y V_y denotan los componentes de la velocidad del fluido en (x, y) respectivamente, en las direcciones positivas x y y . Así existe una función Φ , que se conoce como potencial de velocidad, de tal suerte que:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Una aseveración equivalente es que si C es una curva simple cerrada en el plano z y V_t es la componente tangencial de la velocidad en C , se tiene la expresión:

$$\oint_C V_t ds = \oint_C V_x dx + V_y dy = 0$$

A cada término de la integral se le conoce como circulación de fluido a lo largo de C . Cuando la circulación es igual a cero, el flujo se llama de libre de circulación.

- **El fluido es incomprensible**, la densidad o masa por unidad del volumen del fluido es constante, por lo que si V_n es la componente normal de la velocidad en C , esto nos lleva a establecer la siguiente relación:

$$\oint_C V_n ds = \oint_C V_x dy - V_y dx = 0$$

Similarmente:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

Lo que significa que la cantidad de fluido contenido en el interior de C es una constante. Esto es, la cantidad que entra en C es igual a la cantidad que surge de C . A esta ecuación se le conoce como ecuación de continuidad.

- **El fluido no es viscoso**, es decir, no tiene fricción interna. Un fluido viscoso en movimiento tiende a adherirse a la superficie de un obstáculo colocado a lo largo



de su trayectoria. Si no hay viscosidad, las fuerzas de presión sobre la superficie son perpendiculares a la superficie. Un fluido que no es viscoso y es incompresible se conoce como fluido ideal. Observemos que tal tipo de fluido, es sólo un modelo matemático de uno real en el que los efectos anteriores se consideran insignificantes.

4.3.3. Teoremas: Bernoulli, Blasius, Gauss

Teorema de Bernoulli

Si P denota la presión en un fluido y V es la velocidad del fluido, el *teorema de Bernoulli* dice que:

$$P + \frac{1}{2}\sigma V^2 = K$$

para σ , que es la densidad del fluido, k es una constante a lo largo de toda línea de flujo.

Teorema Blasius

- Sean X y Y las fuerzas netas en las direcciones x y y positivas, respectivamente, éstas debidas a la presión de un fluido sobre la superficie de un obstáculo limitado por una curva simple cerrada C . Si Ω es el potencial complejo del flujo, se tiene la expresión para el teorema de Blasius:

$$X - iY = \frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz$$

- Suponga que M es el momento en torno al origen de las fuerzas de presión sobre el obstáculo. Entonces establecemos la siguiente expresión:

$$M = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{2}i\sigma \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz \right\}$$

donde “Re” es la parte real. La derivada se lleva a cabo respecto de la variable compleja z .

Teorema de Gauss

Considerando distribuciones de carga las cuales son bidimensionales. Sea C una curva simple cerrada en el plano z con una carga neta q en su interior. En realidad se trata de un cilindro infinito que encierra una carga neta q . El campo de fuerza E_n es la componente normal de la intensidad de campo eléctrico, por lo que el *teorema de Gauss* se puede expresar como:



$$\oint_C E_n ds = 4\pi q$$

En el caso en que C no encierre a ninguna carga, la expresión se reduce a:

$$\oint_C E_n ds = \oint_C E_x dy - E_y dx = 0$$

Para el caso en que toda región que no esté ocupada por una carga, se establece la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

Por lo que de la ecuación anterior se llega a $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$

Es decir, Φ es armónica en todos los puntos no ocupados por una carga.

4.3.4. Potenciales electrostáticos complejos y temperatura compleja

De lo discutido anteriormente, sabemos que debe existir una función armónica Ψ conjugada de Φ tal que cumpla que:

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i \Psi(x, y)$$

Sea la función $\Omega(z)$ analítica en una región no ocupada por una carga. Se llama a $\Omega(z)$ el **potencial electrostático complejo**. Usando de este potencial complejo, la ecuación se transforma en:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -\overline{\Omega'(z)}$$

Y la magnitud de ε esta dada por $E = |\varepsilon| = |-\overline{\Omega'(z)}| = \overline{\Omega'(z)}$

Las curvas

$$\Phi(x, y) = \alpha, \quad \Psi(x, y) = \beta$$

son conocidas respectivamente como **líneas equipotenciales** y **líneas de flujo**.



Actividades

La elaboración de las actividades estará guiada por tu docente en línea, mismo que te indicará, a través de la *Planeación didáctica del docente en línea*, la dinámica que tú y tus compañeros (as) llevarán a cabo, así como los envíos que tendrán que realizar.

Para el envío de tus trabajos usarás la siguiente nomenclatura: BVCO_U4_A1_XXYZ, donde BVCO corresponde a las siglas de la asignatura, U4 es la unidad de conocimiento, A1 es el número de actividad, el cual debes sustituir considerando la actividad que se realices, XX son las primeras letras de tu nombre, Y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno.

Autorreflexiones

Para la parte de **autorreflexiones** debes responder las *Preguntas de Autorreflexión* indicadas por tu docente en línea y enviar tu archivo. Cabe recordar que esta actividad tiene una ponderación del 10% de tu evaluación.

Para el envío de tu autorreflexión utiliza la siguiente nomenclatura: BVCO_U4_ATR_XXYZ, donde BVCO corresponde a las siglas de la asignatura, U4 es la unidad de conocimiento, XX son las primeras letras de tu nombre, y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno.

Cierre de la Unidad

A lo largo de esta Unidad has podido adentrarte en la solución de métodos de transformación de funciones de un plano complejo a otro, a esto se le suele llamar **mapeo conforme**. Las aplicaciones de éste, permiten resolver ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera. Asimismo, dan pie a teoremas de las ciencias e ingeniería en el área del electromagnetismo y del flujo de fluidos, tales tópicos están representados por el teorema de Gauss, Blasius y Bernoulli.

También a lo largo de la Unidad has resuelto algunos problemas usando las técnicas aprendidas sobre transformación conforme a situaciones de la física o de la ingeniería, lo que te permitirá comprender la estrecha relación existente entre patrones de flujo y las ecuaciones que los generan.



Fuentes de consulta



- Churchill, R. V., Brown J.W., (2004). *Variable compleja y aplicaciones*. 6ta. Edición. España: McGraw-Hill. ISBN: 0-07-010905-2
- Courant, R., Robbins H. (2006) *¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. Serie Ciencia y Tecnología*. México: Fondo de Cultura Económica. ISBN: 978968166177.
- Spiegel M. R., Lipschutz, S., Schiller, J.J., Spellman D. (2011). *Variable Compleja. Serie Schaum*. España: McGraw-Hill Interamericana de España S.L. ISBN: 978-607-15-0551-4
- Wunsch, A. D. (1999). *Variable compleja con aplicaciones*. 2ª ed. México: McGraw-Hill. ISBN: 968-444-402-8