UnADM
UNIVERSIDAD ABIERTA Y A DISTANCIA DE MÉXICO

Programa de la asignatura:

Matemáticas aplicadas para ingeniería

U2 Series de Fourier

DCSBA

BIOTECNOLOGÍA

Índice

Presentación de la Unidad

En esta Unidad se presenta una introducción a las series de Fourier, la primera sección comienza con el concepto de producto interno de funciones, a partir de éste se define la ortogonalidad de funciones e inmediatamente se presenta la definición de función periódica.

La segunda parte presenta cómo se obtiene la serie de Fourier de una función periódica junto con las propiedades que posee la misma. Finalmente, se presentan los conceptos básicos de la aproximación para las series de Fourier.

Propósitos

- Calcular los coeficientes de la serie de Fourier de una función periódica.
- Calcular la serie de Fourier de una función periódica par o impar.
- Aproximar una función por medio de una serie de Fourier.

Competencia específica

Identificar problemas que no tienen función periódica secuencial, para proponer su solución mediante la aplicación de las series de Fourier.

2. Series de Fourier

Las series de Fourier aparecen en año de 1807 como una propuesta para resolver la ecuación del calor que describe la conducción de un flujo de calor a lo largo de una lámina metálica, estas toman el nombre del matemático francés Joseph Fourier.

La esencia fundamental detrás de las series de Fourier es que **una función con ciertas características se puede expresar en términos de una única serie que tiene funciones senos y cosenos.**

Joseph Fourier.

2.1. Funciones ortogonales

En esta sección se presenta el concepto de **producto interno de funciones**, este es una generalización natural del producto escalar de vectores, a partir de este se define la ortogonalidad de funciones de forma similar a la perpendicularidad de vectores.

2.1.1. Producto interno de funciones

Recuerda que para un par de vectores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, donde $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ y $\beta = (b_1, b_2, b_3)$, El producto punto de α y β está definido por la relación:

$$\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k$$

La anterior definición se generaliza al espacio de funciones (continuas a pedazos definidas sobre un intervalo fijo) del siguiente modo: Sea $\mathrm{C}[a,b]$ el conjunto de todas las funciones continuas a pedazos definidas sobre el intervalo $[a,b]$.

Definición: Dadas $f, g \in \mathrm{C}[a,b]$, el **producto interno** $\langle f, g \rangle$ **de** f **y** g se define por la relación:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx .$$

Observa que lo que se obtiene de calcular un producto interno de funciones sobre un intervalo, es un número real, tal y como sucede en el caso de los vectores en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$ calcular $\langle f, g \rangle$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución: Para resolver este ejercicio solo basta aplicar la definición de producto interno del siguiente modo:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(x^3\right)\left(x^2\right)dx=\int_{-1}^{2}x^5dx=\left[\frac{1}{6}x^6\right]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{1}{6}(2)^6-\frac{1}{6}(-1)^6=\frac{32}{3}-\frac{1}{6}=\frac{21}{2}$$

Por lo tanto $\langle f,g\rangle=\dfrac{21}{2}$.

Ejemplo: Dadas las funciones $f(x)=\operatorname{sen}(2x)$ y $g(x)=x$ calcular $\langle f,g\rangle$ en el intervalo $[-1,1]$.

Solución: De forma similar al ejemplo anterior, este ejercicio se resuelve aplicando la definición de producto interno del siguiente modo:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_{-1}^{1}(\operatorname{sen}(2x))(x)\,dx$$

En el siguiente paso se aplica la técnica de integración por partes, lo que permite obtener:

$$\int x\operatorname{sen}(2x)dx=-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$$

Evaluando de -1 a 1 la integral anterior se tiene:

$$\int_{-1}^{1}x\operatorname{sen}(2x)dx=\left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos(2)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2)\right]-\left[-\frac{1}{2}(-1)\cos(-2)+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(-2)\right]$$
$$=-2\cos(2)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2)$$

Por lo tanto $\langle f,g\rangle=-2\cos(2)+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2)$.

Ejemplo: Dados $f,g\in \mathrm{C}[-1,2]$, con $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x-1$. Calcular $\langle f,g\rangle$.

Solución: Basta aplicar la definición de producto interno a las funciones f y g, como se muestra a continuación:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{2}\left(x^2\right)\left(2x-1\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(2x^3-x^2\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left[-\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^4}{2}\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^4}{2}\right]$$
$$=\frac{9}{2}$$

Por lo tanto, se tiene que $\langle f,g\rangle=\dfrac{9}{2}$

Recuerda que, sobre conjunto $\mathrm{C}[a,b]$ se definen las siguientes operaciones:

- **Suma**: Para $f,g\in\mathrm{C}[a,b]$ la función $f+g$ se define por:

$$\left(f+g\right)(x)=f(x)+g(x).$$

- **Multiplicación por escalares**: Para $c\in\mathbb{R}$ y $f\in\mathrm{C}[a,b]$, la función cf se define por:

$$\left(cf\right)(x)=cf(x).$$

En un curso de cálculo de una variable se demuestra que las funciones $f+g$ y cf son continuas a pedazos sobre el intervalo $[a,b]$, es decir, se cumple que $f+g,\ cf\in\mathrm{C}[a,b]$. Estas dos operaciones le proporcionan al conjunto $\mathrm{C}[a,b]$ una estructura de **espacio vectorial real**.

A continuación se presentan las propiedades que tiene el producto interno sobre $\mathrm{C}[a,b]$.

- **Definido positivo**: $\langle f,f\rangle\geq 0$ para cualquier $f\in\mathrm{C}[a,b]$.

Esto se obtiene del hecho siguiente:

$$\langle f,f\rangle=\int_a^b f(x)f(x)dx=\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx\geq 0.$$

- **Conmutatividad**: $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$ para cualesquiera $f,g\in\mathrm{C}[a,b]$.

Esto se obtiene del hecho siguiente:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=\langle g,f\rangle$$

- **Linealidad**: $\langle cf+g,h\rangle=c\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$ para cuales quiera $f,g,h\in \mathrm{C}[a,b]$ y $c\in\mathbb{R}$.

Esto se obtiene del hecho siguiente:

$$\begin{aligned}\langle f+g,h\rangle&=\int_a^b\big((cf+g)(x)\big)\big(h(x)\big)dx=\int_a^b\big(cf(x)+g(x)\big)h(x)dx\\&=\int_a^b cf(x)h(x)dx+\int_a^b g(x)h(x)dx\\&=c\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle\end{aligned}$$

Recuerda que para vectores en $\mathbb{R}^3$, la norma de un vector es otro concepto que se relaciona con el producto punto de vectores, la relación entre dichos conceptos se presenta en la siguiente relación: Dado $a\in\mathbb{R}^3$, donde $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$, se tiene que:

$$\|\alpha\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{\alpha\cdot\alpha}\ .$$

A partir de la relación anterior se puede definir una norma sobre $\mathrm{C}[a,b]$ de forma similar al caso en $\mathbb{R}^3$:

Definición: Dado $f\in\mathrm{C}[a,b]$, la norma $\|f\|$ de f se define por la relación:

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\sqrt{\int_a^b[f(x)]^2\,dx}\ .$$

Además una función $f\in\mathrm{C}[a,b]$ se dice **normalizada** sí y solo sí $\|f\|=1$.

Cuando $\|f\|\neq 0$ y f no es normalizada, se tiene que la función $\frac{1}{\|f\|}f$ es normalizada y es llamada **la forma normalizada de** f, observa que este proceso es similar al de encontrar **vectores unitarios** en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo: Dada $f \in C[0,2]$, definida por $f(x) = 3\operatorname{sen}(\pi x)$. Calcular $\|f\|$ y presentar su forma normalizada.

Solución: Basta aplicar la definición de norma del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
\|f\| &= \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx} = \sqrt{\int_o^2 [3\operatorname{sen}(\pi x)]^2\,dx} \\
&= \sqrt{9\int_o^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\pi x)\right]dx} = 3\sqrt{\left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\pi x)\right]_0^2} \\
&= 3\sqrt{\left[\frac{(2)}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\big(2\pi(2)\big)\right] - \left[\frac{(0)}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\big(2\pi(0)\big)\right]} \\
&= 3\sqrt{1-0} = 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\|f\| = 3$ y su forma normalizada es $\dfrac{1}{\|f\|} f(x) = \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}(\pi x)$.

2.1.2. Funciones y conjuntos ortogonales

El concepto de perpendicularidad es uno de los más importante en el estudio de los vectores en $\mathbb{R}^3$, este se caracteriza por la relación $\alpha\cdot\beta = \|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman α y β, del siguiente modo: Si α es perpendicular a β entonces $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, lo que implica que:

$$\alpha\cdot\beta = \|\alpha\|\|\beta\|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \|\alpha\|\|\beta\|(0) = 0$$

Inversamente, si $\alpha\cdot\beta = 0$ implica que $\|\alpha\|\|\beta\|\cos\theta = 0$, si $\alpha, \beta \neq 0$ entonces $\cos\theta = 0$ por consiguiente $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$, por consiguiente α es perpendicular a β. En resumen α **es perpendicular a** β **si y solo sí** $\alpha\cdot\beta = 0$. Esta misma idea es llevada al espacio de funciones para definir la ortogonalidad de funciones de forma análoga a la perpendicularidad de vectores.

Definición: Sean $f, g \in \mathrm{C}[a,b]$, se dice que f es ortogonal a g en $[a,b]$ sí y sólo si

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Ejercicio: Muestra que las funciones $f(x) = \cos(\pi x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$ son ortogonales en $[-1,1]$.

Solución: Basta aplicar la definición de ortogonalidad de funciones del siguiente modo:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 \cos(\pi x)\operatorname{sen}(2\pi x)dx$$

Utilizando la identidad:

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(A - B\right) + \operatorname{sen}\left(A + B\right)\right]$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \cos(\pi x)\operatorname{sen}(2\pi x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(\pi x + 2\pi x) + \operatorname{sen}(2\pi x - \pi x)\big)dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(3\pi x) + \operatorname{sen}(\pi x)\big)dx = \left[-\frac{1}{6\pi}\cos(3\pi x) - \frac{1}{2\pi}\cos(\pi x)\right]_{-1}^1 \\
&= \left[-\frac{1}{6\pi}\cos(3\pi) - \frac{1}{2\pi}\cos(\pi)\right] - \left[-\frac{1}{6\pi}\cos(-3\pi) - \frac{1}{2\pi}\cos(-\pi)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es ortogonal a g.

Ejercicio: Muestra que las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ son ortogonales en $[-1,1]$

Solución: Se procede de forma similar al ejercicio anterior:

$$\langle f,g\rangle=\int_{-2}^{2}(x)\left(x^2\right)dx=\int_{-2}^{2}x^3dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2}$$
$$=\frac{1}{4}(2)^4-\frac{1}{4}(-2)^4=4-4=0$$

Por lo tanto $f(x)$ es ortogonal a $g(x)$.

Definición: Sea $\{\phi_n\}_{n\in I}$ un subconjunto de $C[a,b]$, se dice que $\{\phi_n\}_{n\in I}$ es **un conjunto ortogonal de funciones sobre** $[a,b]$ si y solo si ϕ_n es ortogonal a ϕ_m, para cuales quiera $m,n\in I$ con $m\neq n$. A demás, se dice que el conjunto $\{\phi_n\}_{n\in I}$ es un conjunto **ortonormal** sobre $[a,b]$ si y solo si $\{\phi_n\}_{n\in I}$ es ortogonal y ϕ_n es normalizada para toda $n\in I$.

Como consecuencia inmediata de la definición anterior, un conjunto ortonormal $\{\phi_n\}_{n\in I}$ satisface la relación:

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx=\begin{cases}1 & \text{si } m=n\\ 0 & \text{si } m\neq n\end{cases}$$

Observa que a partir de un conjunto ortogonal $\{\phi_n\}_{n\in I}$ de $C[a,b]$ se puede obtener un conjunto ortonormal $\{\varphi_n\}_{n\in I}$, definido por $\varphi_n=\dfrac{1}{\|\phi_n\|}\phi_n$.

Ejercicio: Muestre que el conjunto de funciones $\{\cos(n\pi x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortogonal en $[0,1]$ y presentar el conjunto ortogonal que se obtiene del mismo.

Solución: Por comodidad, sea $\phi_n(x)=cos(n\pi x)$, con $n\in\mathbb{N}$, hay que mostrar que ϕ_n es ortogonal a ϕ_m para $m\neq n$, esto se tiene aplicando la definición de producto interno de funciones del siguiente modo:

$$\langle\phi_n,\phi_m\rangle=\int_0^1\phi_n(x)\phi_m(x)dx=\int_0^1\cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx$$

A partir de la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)\right]$$

Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\cos\left(n\pi x - m\pi x\right)+\cos\left(n\pi x - m\pi x\right)\right]dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[\cos\left[\pi\left(n-m\right)x\right]+\cos\left[\pi\left(n+m\right)x\right]\right]dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n-m}\operatorname{sen}\left[\pi\left(n-m\right)x\right]+\frac{1}{n+m}\operatorname{sen}\left[\pi\left(n+m\right)x\right]\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n-m}\operatorname{sen}\left[\pi\left(n-m\right)\right]+\frac{1}{n+m}\operatorname{sen}\left[\pi\left(n+m\right)\right]\right]-0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Con esto se muestra que el conjunto $\left\{\cos(n\pi x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortogonal. La normalización se divide en dos caso: cuando $n=0$ se tiene que:

$$\left\|\phi_0\right\|^2 = \left\langle \phi_0, \phi_0 \right\rangle = \int_0^1 \left[\phi_0(x)\right]^2 dx = \int_0^1 (1)\, dx = 1.$$

Cuando $m=n\neq 0$, es decir:

$$\left\|\phi_n\right\|^2 = \left\langle \phi_n, \phi_n \right\rangle = \int_0^1 \left[\phi_n(x)\right]^2 dx = \int_0^1 \cos^2(n\pi x)dx$$

Utilizando la relación:

$$\cos^2 A = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2A\right)$$

Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos^2(n\pi x)dx &= \int_0^1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2n\pi x\right)\right) = \left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4\pi n}\operatorname{sen}\left(2n\pi x\right)\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi n}\operatorname{sen}\left(2n\pi\right)\right]-0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

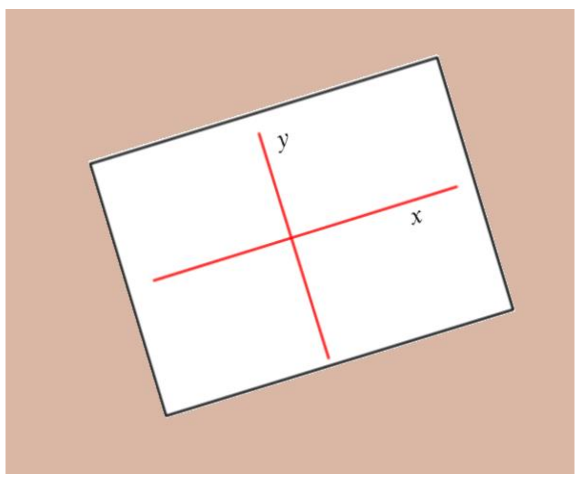
Por consiguiente $\|\phi_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Finalmente, normalizando se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{\|\phi_n\|}\phi_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\cos(n\pi x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x)$$

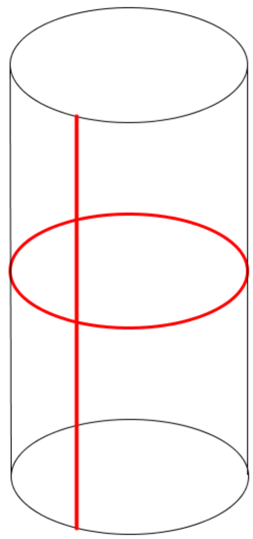
Por lo tanto, el conjunto $\left\{1, \sqrt{2}\cos(n\pi x)\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ es ortonormal sobre $[0,1]$.

2.1.3. Funciones periódicas

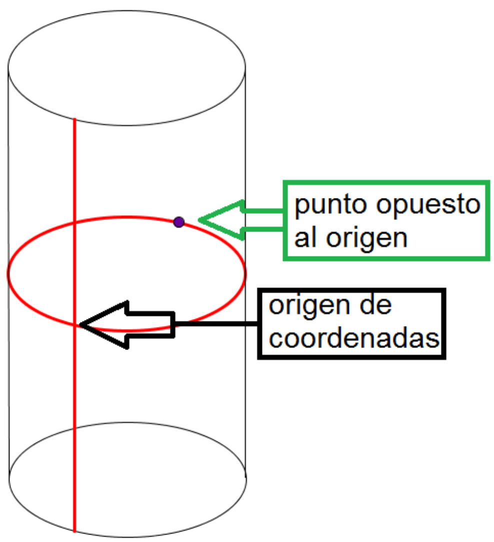
Considera que tienes una hoja de papel, en ella traza un sistema de ejes cartesianos, uno horizontal y otro vertical.



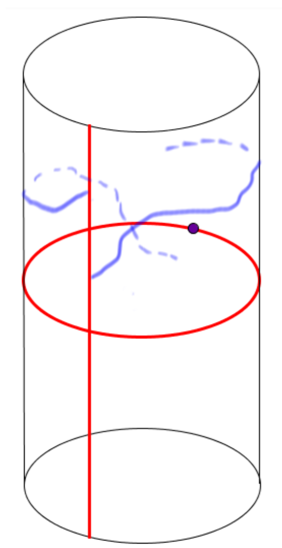
Enrolla dicha hoja de tal forma en que el eje horizontal coincida consigo mismo, formando un cilindro circular.



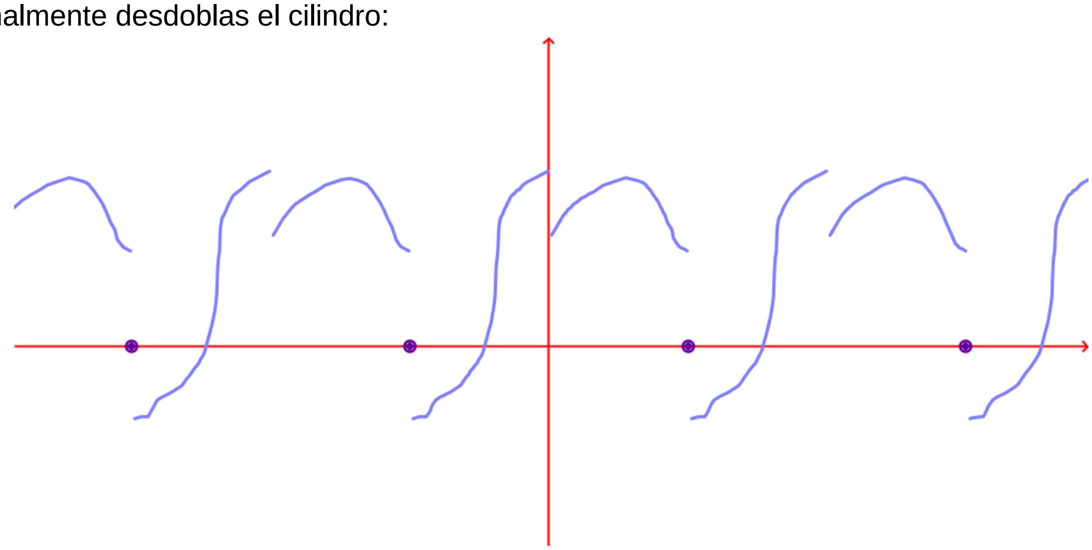
Luego, sobre la superficie del cilindro, observando la posición del eje vertical marca el punto que está del otro lado del círculo que forma el eje horizontal con respecto al origen de coordenadas.



Dibuja una curva que se marque sobre todas las capas del cilindro:



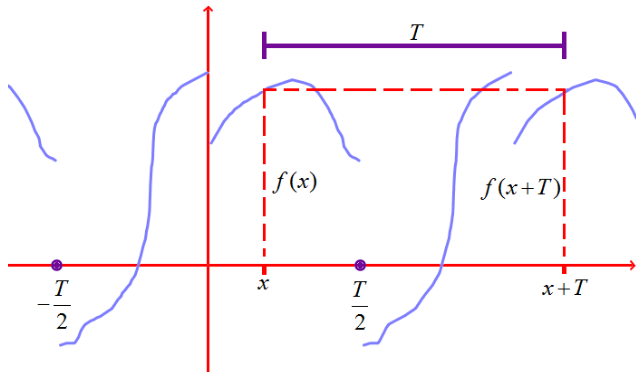
Finalmente desdoblas el cilindro:



Lo que se obtiene en una figura que se repite a partir de un intervalo igual a la longitud del círculo base del cilindro que formaste, una función periódica tiene este comportamiento, la diferencia radica en el hecho de que en vez de considerar un hoja, hay que considerar un plano infinito. Ahora se presenta la definición formal del proceso anterior.

Definición: Sea f una función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se dice que f es periódica y de periodo $T \neq 0$ si y solo si $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

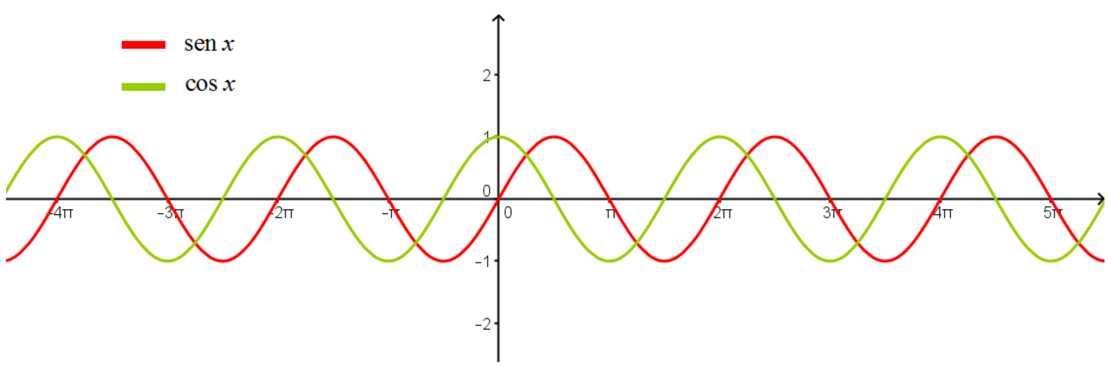
Esta definición afirma que basta conocer cómo se comporta la función en un intervalo de longitud T para tener el comportamiento de toda la función, por simplicidad se toma dicho intervalo alrededor del 0, es decir, el intervalo base o fundamental es $\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$, aquí se considerará el intervalo base indistintamente abierto o cerrado. De forma gráfica se tiene lo siguiente:



Ejemplo: En curso de trigonometría elemental se muestran que las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos x$ satisfacen las relaciones:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x)=\operatorname{sen}(2\pi+x)$$

Por lo tanto las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos x$ son periódicas y de periodo 2π. Gráficamente se tiene lo siguiente:



A continuación se presentan algunas propiedades que poseen las funciones periódicas.

Propiedades: Sea f una función periódica y de periodo T.

- f es periódica de periodo nT con $n\in\mathbb{Z}$. Para obtener esto, primero hay que observar que cuando se toma $y=x-T$ implica que

$$f(x-T)=f(y)=f(y+T)=f(x)$$

En consecuencia si f es periódica de periodo T también es periódica y de periodo $-T$, basta tomar $T>0$ y $n>0$ para obtener lo siguiente:

$$f(x+nT)=f(x+(n-1)T)=\cdots=f(x+2T)=f(x+T)=f(x)$$

- Dada $a\neq 0$, la función dilatación f_a definida por $f_a(x)=f(ax)$ es periódica y de periodo $T_a=\dfrac{T}{a}$. Esto se obtiene de observar que:

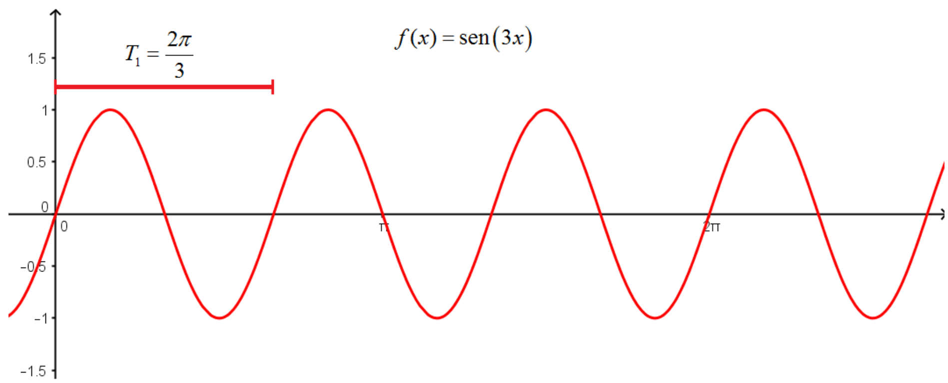
$$f_a\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax)=f_a(x).$$

Ejemplo: Un consecuencia inmediata de lo anterior que las funciones $\operatorname{sen}(nx)$ y $\cos(nx)$, donde $n\neq 0$, son periódicas y de periodo $\dfrac{2\pi}{n}$.

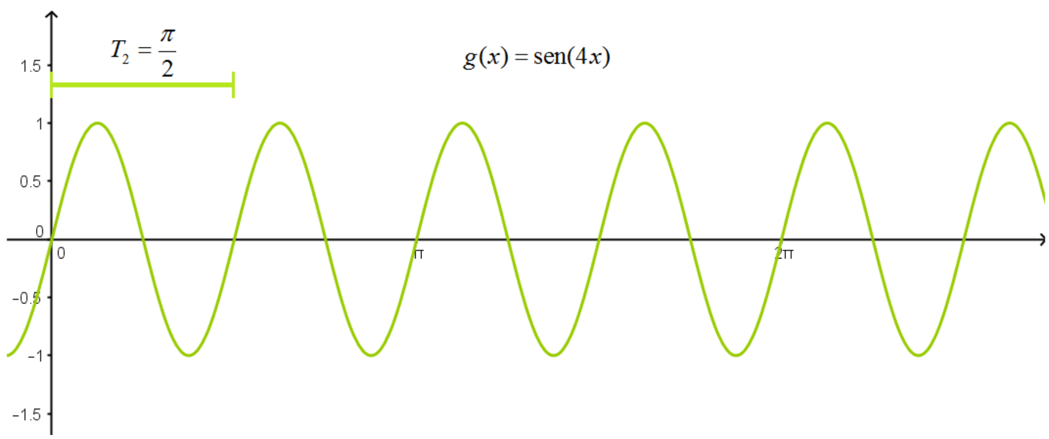
Dadas dos funciones periódicas su suma o diferencia no necesariamente es una función periódica, para que esta sea una función periódica, hay que observar **el cociente de los periodos tiene que ser un número racional**, es decir, tiene que existir un periodo común mínimo que es múltiplo común entero a los periodos de las funciones dadas. Si no se tiene esta condición, la función resultante no es periódica.

Ejercicio: Dadas las función $f(x)=\operatorname{sen}(3x)$ y $g(x)=\operatorname{sen}(4x)$, muestra que la función $h(x)=\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(4x)$ es periódica y encontrar dicho periodo.

Solución: Observa que las funciones $f(x)=\operatorname{sen}(3x)$ y $g(x)=\operatorname{sen}(4x)$ tienen por periodo $T_1=\dfrac{2\pi}{3}$ y $T_2=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ respectivamente. Gráficamente, para la función $f(x)=\operatorname{sen}(3x)$:



Para la función $g(x) = \operatorname{sen}(4x)$:



Tomando el siguiente cociente:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$$

Implica que $h(x) = \operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(4x)$ es periódica. Para encontrar el periodo primero hay que observar que el denominador común 6 por consiguiente:

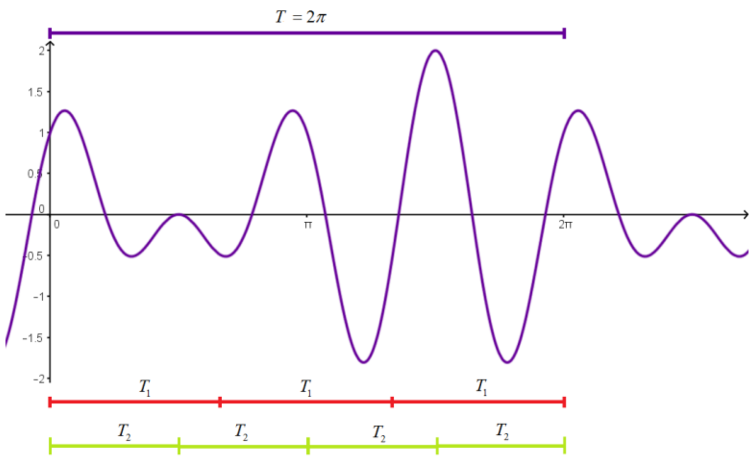
$$T_1 = \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{6}\pi \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{6}\pi$$

Ahora, hay que calcular el mínimo común múltiplo entre los numeradores, en este caso es 12. Por consiguiente:

$$3T_1 = 3\left(\frac{4}{6}\pi\right) \quad \text{y} \quad 4T_2 = 4\left(\frac{3}{6}\pi\right)$$

Por lo tanto, $h(x)=\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(4x)$ es periódica y de periodo $T=\frac{12}{6}\pi=2\pi$.

Gráficamente, se tiene lo siguiente:

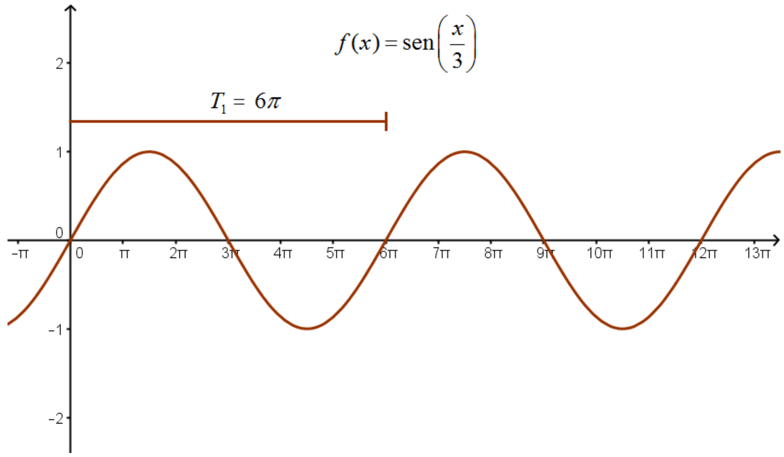


Ejercicio: Dadas las función $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ y $g(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$, muestre que la función $h(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ es periódica y encontrar dicho periodo.

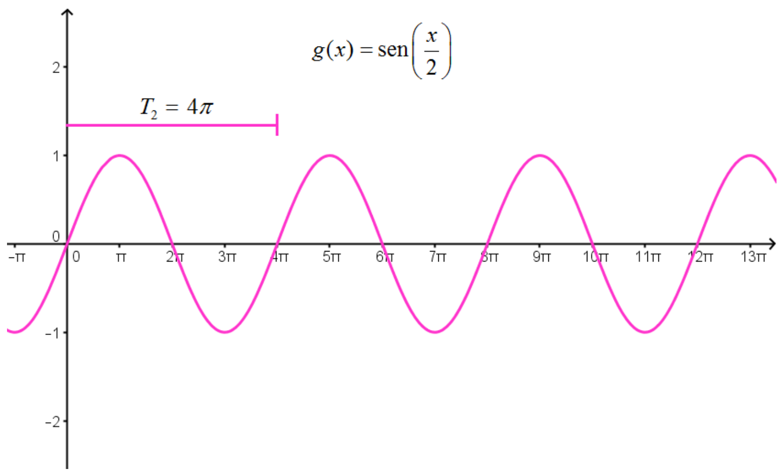
Solución: Se procede de forma similar al ejercicio anterior: Observa que las funciones $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$ y $g(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ tienen por periodo:

$$T_1=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi \quad \text{y} \quad T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$$

respectivamente. Gráficamente, para la función $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$:



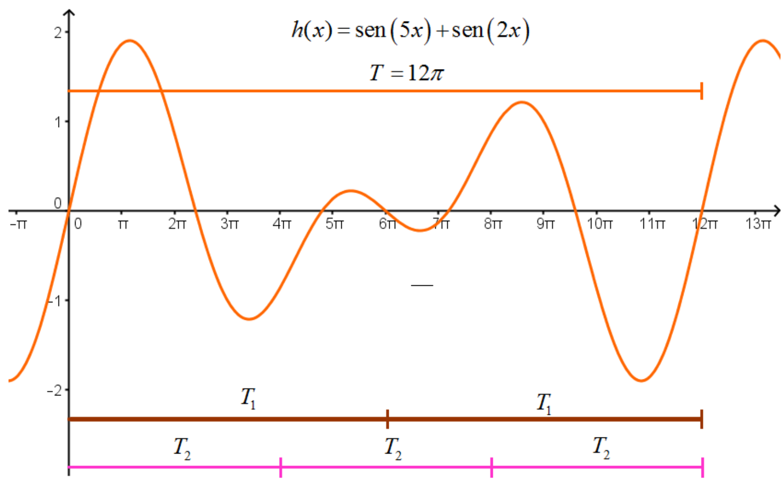
Para la función $g(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$:



Tomando el siguiente cociente:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{6\pi}{4\pi} = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$$

Esto implica que $h(x) = \text{sen}(5x) + \text{sen}(2x)$ es periódica. Para encontrar el periodo, hay que observar que los periodos son múltiplos enteros de π, en consecuencia, solo hay que calcular el mínimo común múltiplo entre los coeficientes, en este caso es 12. Por lo tanto, $h(x) = \text{sen}(3x) + \text{sen}(4x)$ es periódica y de periodo $T = 12\pi$. Gráficamente, se tiene lo siguiente:



Ejercicio: Dadas la funciones $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\text{sen}(\pi x)$, muestre que las función $h(x)=\cos x+\text{sen}(\pi x)$ no es periódica.

Solución: Se tiene que las funciones $f(x)=\cos x$ y $g(x)=\text{sen}(\pi x)$ tienen periodos $T_1=2\pi$ y $T_2=2$ respectivamente, tomando el cociente

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

Pero π no es un número racional. Por lo tanto, la función $h(x)=\cos x+\text{sen}(\pi x)$ no es periódica.

A continuación se presentan algunas relaciones que hay entre las funciones periódicas y sus integrales: Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, con $\alpha<\beta$, entonces hay que analizar el comportamiento de la integral.

$$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx$$

Para ello hay que observar que si $y=x+T$ entonces:

$$f(y)=f(y-T+T)=f(x+T)=f(x).$$

Tomando y haciendo el cambio de variable se tiene lo siguiente:

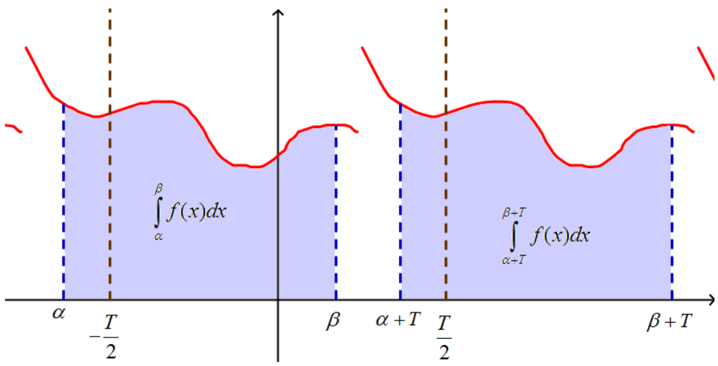
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(y-T)dy = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(y)dy$$

Lo anterior implica se resume en el siguiente enunciado:

Lema: Sea f una función periódica de periodo T, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha < \beta$, entonces

$$\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Gráficamente se tiene lo siguiente: $\alpha + T$ $\beta + T$



Como consecuencia inmediata tomando $\alpha = 0$ y $\beta = t$ se tiene que:

$$\int_{T}^{t+T} f(x)dx = \int_{0}^{t} f(x)dx$$

Otra consecuencia que se obtiene de lo anterior es lo siguiente:

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_{a-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)dx$$

El lema anterior se aplica para obtener las siguientes relaciones:

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_{\left(a+\frac{T}{2}\right)-T}^{\frac{T}{2}-T} f(x)dx = \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

Esto implica que:

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_{a-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx + \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)dx$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)dx + \int_{a+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

Esto muestra la validez del siguiente resultado:

Corolario: Sea f una función periódica de periodo T entonces para todo $a\in\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

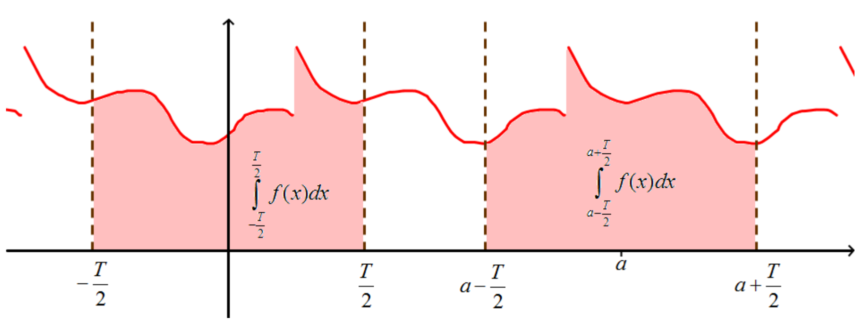
Además se cumple lo siguiente:

$$\int_{0}^{t} f(x)dx = \int_{T}^{t+T} f(x)dx \,.$$

Aplicando el corolario anterior al caso particular cuando $a = \frac{T}{2}$ se tiene que:

$$\int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \,.$$

El resultado anterior se describe Gráficamente en la siguiente figura:



2.2. Series de Fourier

Como es sabido, las funciones senos y cosenos son funciones continuas y periódicas, la esencia detrás de la serie de Fourier es utilizar estas funciones para poder aproximarse a cualquier función periódicas.

2.2.1. Series trigonométricas

Para poder expresar una función periódica en términos de seno y cosenos, primero hay que considerar el siguiente resultado, que muestra que este conjunto es ortogonal el intervalo de longitud 2π centrado en el origen:

Proposición: El conjunto

$$\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \operatorname{sen}(3x), \cos(3x), \ldots\}$$

Es ortogonal en $(-\pi, \pi)$.

Demostración: Para ubicarse mejor se define $\phi_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$ y $\varphi_n(x) = \cos(nx)$, entonces se tiene los siguientes casos:

Caso 1. Norma de 1: esto se obtiene de la siguiente relación:

$$\langle 1,1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = (\pi) - (-\pi) = 2\pi \,.$$

Caso 2. Ortogonalidad entre ϕ_n y 1: Esto se obtiene inmediatamente de la siguientes relaciones donde se utiliza el hecho de que $\cos(x) = \cos(-x)$:

$$\langle \phi_n, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)dx = -\frac{1}{n}\cos(nx) = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\cos(-\pi n) = 0$$

Es decir, ϕ_n es ortogonal a 1.

Caso 3. Ortogonalidad entre φ_n y 1: Esto se obtiene inmediatamente de la siguientes relaciones donde se utiliza el hecho de que $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\langle \varphi_n, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx) = 0$$

Es decir, ϕ_n es ortogonal a 1.

Caso 4. Ortogonalidad entre ϕ_n y ϕ_m: Para esto basta aplicar la identidad siguiente:

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

Lo que implica que:

$$\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\cos\left[(m-n)x\right] - \cos\left[(m+n)x\right]\right] & \text{si } m \neq n \\ \frac{1}{2}\left(1-\cos(2nx)\right) & \text{si } m = n \end{cases}$$

En consecuencia, cuando $m \neq n$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\cos\left[(m-n)x\right] - \cos\left[(m+n)x\right]\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m-n)}\operatorname{sen}\left[(m-n)x\right] - \frac{1}{(m+n)}\operatorname{sen}\left[(m+n)x\right]\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para $m = n$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \phi_n, \phi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[1-\cos(2nx)\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\operatorname{sen}(2nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\pi - (-\pi)\right) = \pi \end{aligned}$$

En resumen se tiene:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq 0 \\ \pi & \text{si } m = 0 \end{cases}.$$

Caso 5. Ortogonalidad entre φ_n y φ_m: Para esto basta aplicar la identidad siguiente:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$

Lo que implica que:

$$\cos(mx)\cos(nx)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[\cos\left[(m-n)x\right]+\cos\left[(m+n)x\right]\right] & \text{si } m\neq n\\ \frac{1}{2}\left(1+\cos(2nx)\right) & \text{si } m=n\end{cases}$$

En consecuencia, cuando $m\neq n$ se tiene

$$\begin{aligned}\langle\varphi_m,\varphi_n\rangle&=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\cos(nx)dx=\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos\left[(m-n)x\right]+\cos\left[(m+n)x\right]\right]dx\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(m-n)}\operatorname{sen}\left[(m-n)x\right]+\frac{1}{(m+n)}\operatorname{sen}\left[(m+n)x\right]\right]_{-\pi}^{\pi}\\&=0\end{aligned}$$

Para $m=n$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle&=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left[1+\cos(2nx)\right]dx\\&=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2n}\operatorname{sen}(2nx)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}\left(\pi-(-\pi)\right)=\pi\end{aligned}$$

En resumen se tiene:

$$\langle\varphi_n,\varphi_m\rangle=\begin{cases}0 & \text{si } m\neq 0\\ \pi & \text{si } m=0\end{cases}.$$

Caso 6. Ortogonalidad entre ϕ_m y φ_n: Para esto basta aplicar la identidad siguiente:

$$\operatorname{sen}A\cos B=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A-B)+\operatorname{sen}(A+B)\right]$$

Lo que implica que:

$$\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left[(m-n)x\right]+\cos\left[(m+n)x\right]\right]$$

En consecuencia, cuando $m \neq n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \phi_m, \varphi_n \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left[(m-n)x\right] + \operatorname{sen}\left[(m+n)x\right]\right]dx \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(m-n)}\cos\left[(m-n)x\right] - \frac{1}{(m+n)}\cos\left[(m+n)x\right]\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{(m-n)}(-1)^{m-n} - \frac{1}{(m+n)}(-1)^{m+n}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{(m-n)}(-1)^{m-n} - \frac{1}{(m+n)}(-1)^{m+n}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Es decir, ϕ_m es ortogonal a φ_n.

Por lo tanto el conjunto

$$\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \operatorname{sen}(3x), \cos(3x), \ldots\}$$

Es ortogonal en $(-\pi, \pi)$.

Ahora se tienen todos los ingredientes para poder presentar la serie de Fourier de una función periódica, lo que se realiza a continuación: Sea f una función periódica de periodo 2π y supóngase que tal función puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

Partiendo de una compatibilidad entre la integral y la serie, se puede integrar tal función de $-\pi$ a π para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right]dx \\
&= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right)dx \\
&= a_0\pi
\end{aligned}$$

Es decir, se tiene que $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$. Por otra parte para $k \in \mathbb{N}$ se multiplica la función por $\cos(kx)$, luego se integra de $-\pi$ a π y utilizando las propiedades de ortogonalidad presentadas en la proposición anterior se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right]\cos(kx)dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\operatorname{sen}(kx)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\cos(kx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\cos(kx)\right]dx\\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_n\cos(nx)\cos(kx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\cos(kx)\right)dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}a_k\cos^2(kx)dx = a_k\pi\end{aligned}$$

Por consiguiente $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$. Si el proceso anterior se realiza con $\operatorname{sen}(kx)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\right]\operatorname{sen}(kx)dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\operatorname{sen}(kx)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\operatorname{sen}(kx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(kx)\right]dx\\ &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(kx)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_n\cos(nx)\operatorname{sen}(kx)+b_n\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(kx)\right)dx\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}b_k\operatorname{sen}^2(kx)dx = b_k\pi\end{aligned}$$

Por consiguiente $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(kx)dx$.

Las observaciones anteriores motivan la siguiente definición:

Definición: Sea f una función periódica de periodo 2π. La **serie trigonométrica de Fourier** asociada a f es:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\operatorname{sen}(nx)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

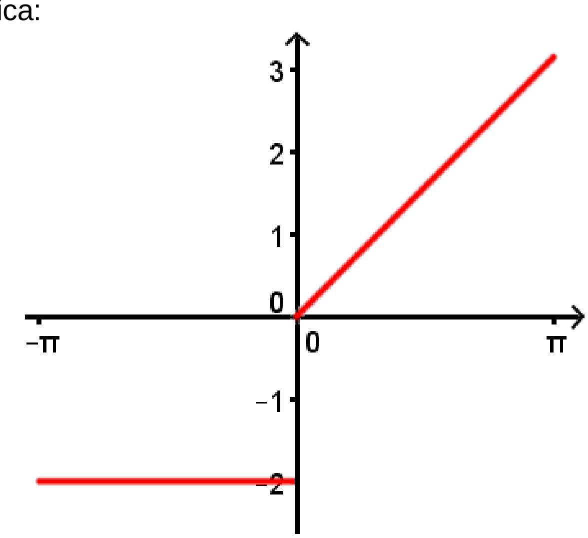
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx\,.$$

Cabe mencionar que cuando no hay peligro de confusión usualmente se dice serie de Fourier en vez de serie trigonométrica de Fourier.

Ejemplo: Determinar la serie de Fourier de la función

$$f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } -\pi<x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le \pi \\ f(x+2\pi) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución: Para tener una idea visual observa que f en el intervalo fundamental tiene la siguiente gráfica:



Luego se procede a calcular los coeficientes de Fourier del siguiente modo:

(a) Para a_0 se realiza lo siguiente:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2)\,dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\left[-2x\right]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(0+(-2\pi)\right)+\left(\frac{1}{2}\pi^2-0\right)\right]=\frac{\pi}{2}-2$$

(b) Para a_n se realiza lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{2}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[0 + \left[\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right]\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}
$$

Hay que observar la expresión:

$$
\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ -\dfrac{2}{n^2} & n \text{ es impar} \end{cases}
$$

En consecuencia

$$
a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & n \text{ es impar} \end{cases}
$$

Finalmente se tiene que $a_{2k-1} = -\dfrac{2}{\pi(2k-1)^2}$.

(c) Para b_n se realiza lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-2)\operatorname{sen}(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\operatorname{sen}(nx)dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{2}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n}(-1)^n\right) + \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n}\right)\right] \\
&= \frac{2 - 2(-1)^n - \pi(-1)^n}{n\pi}
\end{aligned}
$$

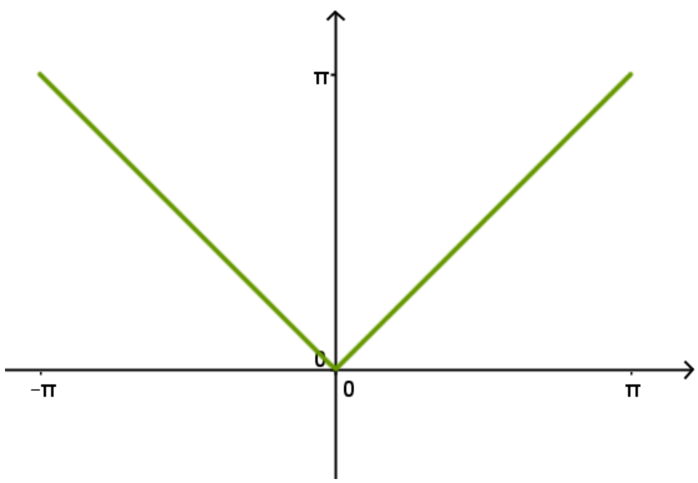
Finalmente se tiene que $b_n = \dfrac{2 - 2(-1)^n - \pi(-1)^n}{n\pi}$.

Por lo tanto la serie de Fourier es de f es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{2n-1}\cos((2n-1)x) + \frac{2-2(-1)^n - \pi(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen}(nx)\right] \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) + \frac{2-2(-1)^n - \pi(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen}(nx)\right] \end{aligned}$$

Ejemplo: Determinar la serie de Fourier de la función $f(x) = |x|$ si $x \in (-\pi, \pi)$ y $f(x) = f(x+2\pi)$ en otro caso.

Solución: Para tener una idea visual observa que f en el intervalo base tiene la siguiente gráfica:



Luego se procede a calcular los coeficientes de Fourier del siguiente modo:

(a) Para a_0 se realiza lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right] = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\pi^2\right)\right) + \left(\frac{1}{2}\pi^2 - 0\right)\right] = \pi \end{aligned}$$

(b) Para a_n se realiza lo siguiente:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{\cos(nx)}{n^2} - \frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{1}{n^2} + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right]\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Hay que observar la expresión:

$$\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ -\dfrac{2}{n^2} & n \text{ es impar} \end{cases}$$

En consecuencia

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente se tiene que $a_{2k-1} = -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$.

(c) Para b_n se realiza lo siguiente:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-x)\mathrm{sen}(nx)dx + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{sen}(nx)dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi(-1)^n}{n}\right) + \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n}\right)\right] = 0$$

Finalmente se tiene que $b_n = 0$.

Por lo tanto la serie de Fourier es de f es:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx) \\ &= \frac{1}{2}(\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{2n-1}\cos((2n-1)x) + (0)\operatorname{sen}(nx)\right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) \end{aligned}$$

Considera una función $g(x)$ de periodo 2π , a partir de esta se define la función:

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$$

Esta función es periódica y de periodo T , lo cual se verifica de la siguiente manera:

$$f(x+T) = g\left(\frac{2\pi}{T}(x+T)\right) = g\left(\frac{2\pi}{T}x + 2\pi\right) = g\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = f(x)$$

En consecuencia la representación de Fourier de $g(x)$ dada por:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

Donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\operatorname{sen}(nx)dx$$

Sustituyendo $x \mapsto \frac{2\pi}{T}x$ se tiene que:

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi}{T}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)$$

Además

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\frac{2\pi}{T}du = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)du$$

Luego

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nu\right)\frac{2\pi}{T}du \\ &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}u\right)du \end{aligned}$$

De manera similar se tiene que:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}u\right)du$$

Esto permite obtener la serie de Fourier de una función periódica de periodo arbitrario como se presenta a continuación:

Definición: Sea f una función periódica de periodo T. La serie de Fourier asociada a f es:

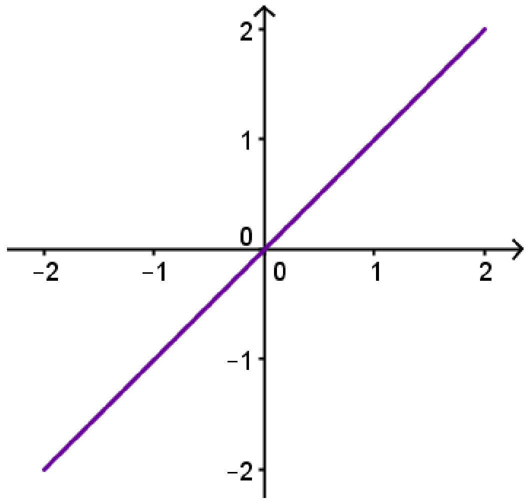
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx\,.$$

Ejemplo: Determinar la serie de Fourier de la función $f(x)=x$ si $x\in(-2,2)$ y $f(x)=f(x+4)$ en otro caso.

Solución: Primero hay que observar que la función f es periódica de periodo $T=4$. La gráfica de f en intervalo fundamental es la siguiente:



Luego se procede a calcular los coeficientes de Fourier del siguiente modo:

(a) Para a_0 se realiza lo siguiente:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{2}{4}\int_{-\frac{4}{2}}^{\frac{4}{2}} xdx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} xdx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}(2)^2 - \frac{1}{4}(-2)^2 = 0$$

(b) Para a_n se realiza lo siguiente:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\cos\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n^2\pi^2} + \frac{2x\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{4\cos(-n\pi)}{n^2\pi^2}\right] = 0$$

Así, se tiene que $a_n = 0$.

(c) Para b_n se realiza lo siguiente:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi} + \frac{4\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n^2\pi^2}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2(2)\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{2(-2)x\cos(n\pi)}{n\pi}\right]$$

$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Finalmente se tiene que $b_n = \dfrac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$.

Por lo tanto la serie de Fourier es de f es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right) + b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)$$

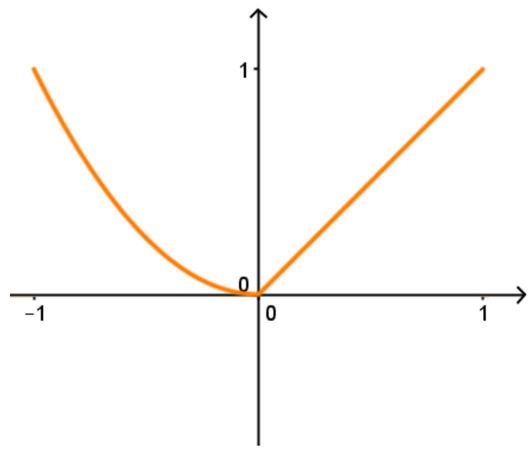
$$= \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right) + \left(\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)$$

Ejemplo: Determinar la serie de Fourier de la función periódica definida en el intervalo fundamental por la relación:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ x & \text{si } \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

Solución: Primero hay que observar que la función f es periódica de periodo $T = 2$. La gráfica de f en intervalo fundamental es la siguiente:



Luego se procede a calcular los coeficientes de Fourier del siguiente modo:

(a) Para a_0 se realiza lo siguiente:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} xdx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \left[0 - \frac{1}{3}(-1)^3\right] + \left[\frac{1}{2}(1)^2 - 0\right]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

(b) Para a_n se realiza lo siguiente:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{2}x\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2\cos(\pi n x)dx + \int_{0}^{1} x\cos(\pi n x)dx$$

$$= \left[\frac{2n\pi x\cos(n\pi x) + \left(-2 + n^2\pi^2 x^2\right)\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^3\pi^3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2} + \frac{x\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[0 - \frac{2n\pi(-1)\cos(-n\pi)}{n^3\pi^3}\right] + \left[\frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi} + \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} = \frac{3(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$$

Así, se tiene que $a_n = \dfrac{3(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}$.

(c) Para b_n se realiza lo siguiente:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{2}x\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{0} x^2\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx + \int_{0}^{1} x\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx$$

$$= \left[\frac{(2 - n^2\pi^2x^2)\cos(n\pi x) + 2n\pi x\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^3\pi^3}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{(2 - n^2\pi^2)\cos(-n\pi)}{n^3\pi^3}\right] + \left[-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - 0\right]$$

$$= \frac{2}{n^3\pi^3} - \frac{(2 - n^2\pi^2)(-1)^n}{n^3\pi^3} - \frac{(-1)^n}{n\pi} = \frac{2 - (2 - n^2\pi^2)(-1)^n - n^2\pi^2(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

$$= \frac{2 - 2(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

Hay que observar la expresión:

$$2 - 2(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ 4 & n \text{ es impar} \end{cases}$$

En consecuencia

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{\pi^3 n^3} & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente se tiene que $b_{2k-1} = \dfrac{4}{\pi^3(2k-1)^3}$.

Por lo tanto la serie de Fourier es de f es:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) + b_n \operatorname{sen}(\pi n x) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right)\cos(\pi n x) + \left(\frac{4}{\pi^3(2n-1)^3}\right)\operatorname{sen}(\pi n x)\right] \\
&= \frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{3(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right)\cos(\pi n x) + \left(\frac{4}{\pi^3(2n-1)^3}\right)\operatorname{sen}(\pi n x)\right]
\end{aligned}
$$

2.2.2. La serie de Fourier de una función

El proceso anterior, se puede generalizar del siguiente modo: Sea f una función continua a pedazos definida sobre el intervalo (a,b). Dado $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal de funciones en el intervalo (a,b). Supóngase que f es combinación de los elementos $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, existen $a_n \in \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$ tales que:

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)
$$

para todo $x \in (a,b)$ salvo en conjunto finito de puntos. El problema a resolver es determinar los valores de los coeficientes $a_n \in \mathbb{R}$, para ellos se procede de forma similar a lo presentado en la sección anterior.

Por definición que $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortonormal en (a,b) significa que:

$$
\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}
$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ con k fijo, suponiendo que la integral y la serie pueden conmutar, entonces se tiene las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\langle f,\phi_k\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x),\phi_k(x)\right\rangle = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)\right]\phi_k(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)\phi_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n\phi_n(x)\phi_k(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \phi_n(x)\phi_k(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle \phi_n,\phi_k\rangle \\ &= a_k\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x) \quad \text{donde } a_n = \langle f,\phi_n\rangle = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx.$$

Esta última relación se conoce como la **serie de Fourier generalizada** con respecto al conjunto ortonormal $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la función f en el intervalo (a,b), finalmente los elementos $\{a_n\}$ son conocidos como **las constantes de Fourier**.

Ejemplo: En la sección anterior se mostró que el conjunto $\left\{1,\sqrt{2}\cos(n\pi x)\right\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ es ortonormal sobre $[0,1]$. Sea $\phi_0(x)=1$ y $\phi_n(x)=\sqrt{2}\cos(n\pi x)$ entonces para una función $f\in C[0,1]$ su serie de Fourier está dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sqrt{2}\cos(n\pi x)$$

Donde $a_0 = \int_0^1 f(x)dx$ y $a_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)dx = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx$.

2.2.3. Convergencia de una serie de Fourier

En la sección anterior se presentó la función periódica:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ f(x+2\pi) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

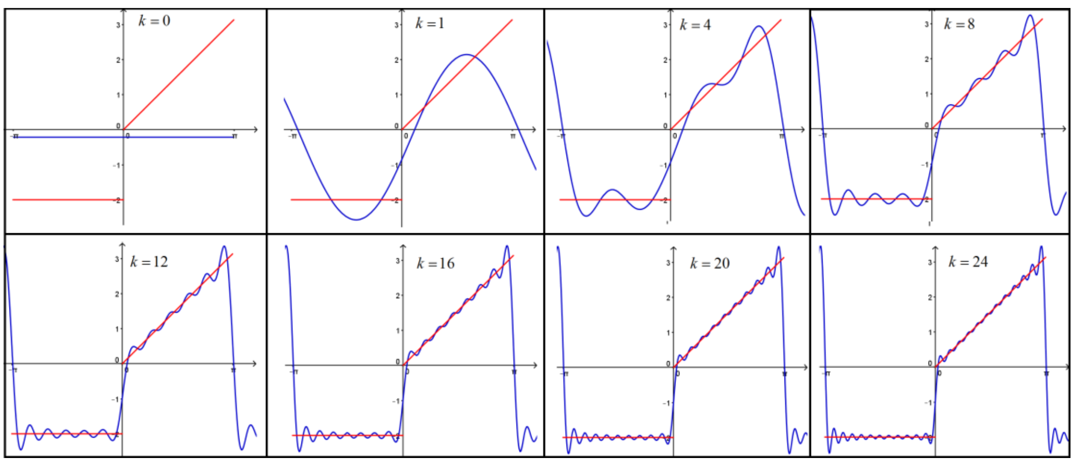
Tiene como serie de Fourier la función:

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi\left(2n-1\right)^{2}}\cos\left((2n-1)x\right)+\frac{2-2\left(-1\right)^{n}-\pi\left(-1\right)^{n}}{n\pi}\operatorname{sen}\left(nx\right)\right]$$

Para ejemplificar la esencia de la Fourier se toman k elementos de dicha serie, lo que induce la siguiente función:

$$f_k(x)=f(x)=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\sum_{n=1}^{k}\left[-\frac{2}{\pi\left(2n-1\right)^{2}}\cos\left((2n-1)x\right)+\frac{2-2\left(-1\right)^{n}-\pi\left(-1\right)^{n}}{n\pi}\operatorname{sen}\left(nx\right)\right]$$

Comparando la gráfica de f con la gráfica de la función f_k para algunos valores de k se tienen las siguientes figuras:



Como observarás a medida que se k crece la discrepancia que hay entre las gráficas de las funciones f y f_k es menor, este proceso toma el nombre de convergencia de funciones.

El matemático Peter Gustav Lejeune Dirichlet propuso un conjunto de hipótesis simples que tiene que cumplir una función periódica para que la serie de Fourier converja a la función original, estas hipótesis son conocidas como **las condiciones de Dirichlet**.

Definición: Una función f es suaves a pedazos en un intervalo dado si y solo si las funciones f y f' son continuas a pedazos en dicho intervalo.

De forma gráfica, una función a suave a pedazos debe de tener un número finito de discontinuidades y un número finito de picos.

Teorema: Sea f una función suave a pedazos y periódica de periodo T. Entonces la serie de Fourier converge al promedio $\frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)\right)$, donde $f\left(x_0^+\right)$ y $f\left(x_0^-\right)$ denotan los limites por la derecha e izquierda de f en x_0 respectivamente. En particular, cuando f es continua en x_0 se tiene que la serie de Fourier converge a $f(x_0)$.

Cabe mencionar que estas condiciones son de **suficiencia**, esto quiere decir, que si se cumplen se garantiza la convergencia de la serie de Fourier, sin embargo cuando una función **no** se cumpla con dichas condiciones su serie de Fourier **puede o no converger**. Aplicando este teorema al ejemplo presentando anteriormente, debes observa que hay una discontinuidad en $x_0=0$. Luego $f(x)\to -2$ cuando $x\to 0^-$ y además $f(x)\to 0$ cuando $x\to 0^+$, entonces la serie de Fourier converge en $x_0=0$ a

$$\frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right)+f\left(x_0^-\right)\right)=\frac{1}{2}\left(0+(-2)\right)=-1$$

Finalmente, observa que $f_k(0)=-1$.

Como consecuencia de las condiciones de Dirichlet se tiene el siguiente resultado:

Teorema: Sea f una función suave a pedazos y periódica de periodo T tal que f' es suave a pedazos, entonces

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{T}\left[-a_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right].$$

Demostración: Se tiene f' es suave a pedazos y periódica de periodo T, en consecuencia se puede expresar por medio de una serie de Fourier:

$$f'(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+\beta_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Donde

$$\alpha_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f'(x)dx \quad \alpha_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f'(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \quad \beta_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f'(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx$$

Por el teorema fundamental del cálculo se tiene que:

$$\alpha_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)dx = \frac{2}{T}\left[f\left(\frac{T}{2}\right) - f\left(-\frac{T}{2}\right)\right] = 0 \quad \text{ya que } f\left(\frac{T}{2}\right) = f\left(-\frac{T}{2}\right).$$

Por otra parte, por medio de la integración por partes se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \\ &= \frac{2}{T}\left[\left[f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{2\pi n}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx\right] \\ &= \frac{2\pi n}{T}\left[\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx\right] = \frac{2\pi n}{T}b_n\end{aligned}$$

De forma similar se tiene:

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f'(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx \\ &= \frac{2}{T}\left[\left[f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{2\pi n}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx\right] \\ &= \frac{2\pi n}{T}\left[-\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx\right] = -\frac{2\pi n}{T}a_n\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi n}{T}\left[-a_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right].$$

Ejemplo: Dada la función $f(x)=e^{-x}$ en el intervalo $(-3,3)$ y $f(x+6)$ en otro caso, utilice los primeros 5 términos diferentes de cero de la serie de Fourier para aproxima a la función f .

Solución: Antes que nada hay que observar que la función f tiene periodo $T=6$, Los coeficientes de la serie de Fourier, se calculan de forma similar a los ejemplos de la sección anterior:

(a) Para a_0 se realiza lo siguiente:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=\frac{2}{6}\int_{-3}^{3} e^x dx=\frac{1}{3}\left[e^x\right]_{-3}^{3}=\frac{1}{3}\left(e^3-e^{-3}\right)$$

(b) Para a_n se realiza lo siguiente:

$$\begin{aligned}
a_n &=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx=\frac{2}{6}\int_{-3}^{3} e^x\cos\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx \\
&=\frac{1}{3}\left[\frac{3e^x}{9+n^2\pi^2}\left(3\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)+n\pi\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right)\right]_{-3}^{3} \\
&=\left[\frac{e^3}{9+n^2\pi^2}\left(3\cos(n\pi)\right)\right]-\left[\frac{e^{-3}}{9+n^2\pi^2}\left(3\cos(-n\pi)\right)\right] \\
&=\frac{3\left((-1)^n e^3-(-1)^n e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2}=\frac{3(-1)^n\left(e^3-e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2}
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $a_n=\dfrac{3(-1)^n\left(e^3-e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2}$.

(c) Para b_n se realiza lo siguiente:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx = \frac{2}{6}\int_{-3}^{3} e^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{3}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3e^x}{9+n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)+3\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right)\right]_{-3}^{3}$$

$$= \left[\frac{e^3}{9+n^2\pi^2}\left(-n\pi\cos(n\pi)\right)\right] - \left[\frac{e^{-3}}{9+n^2\pi^2}\left(n\pi\cos(-n\pi)\right)\right]$$

$$= \frac{\left(-n\pi(-1)^n e^3 - n\pi(-1)^n e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2} = -\frac{n\pi(-1)^n\left(e^3+e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2}$$

Así, se tiene que $b_n = -\frac{n\pi(-1)^n\left(e^3+e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2}$.

Por lo tanto la serie de Fourier es de f es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{3}nx\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}nx\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(e^3-e^{-3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n\left(e^3-e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}nx\right) - \frac{n\pi(-1)^n\left(e^3+e^{-3}\right)}{9+n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}nx\right)\right]$$

En consecuencia, los primeros cinco términos no cero de la serie anterior son:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(e^3-e^{-3}\right)\right) + \frac{3(-1)^{(1)}\left(e^3-e^{-3}\right)}{9+(1)^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(1)x\right) - \frac{(1)\pi(-1)^{(1)}\left(e^3+e^{-3}\right)}{9+(1)^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}(1)x\right)$$

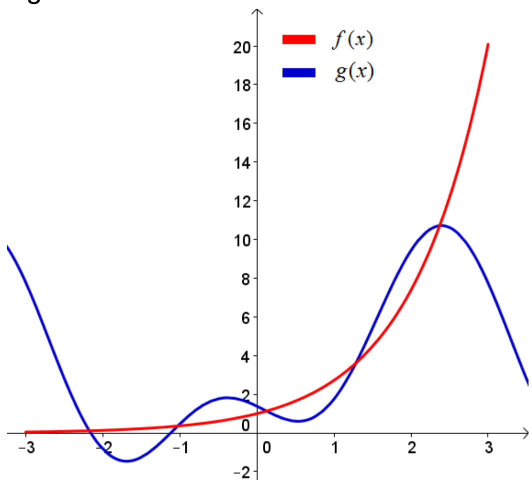
$$+\frac{3(-1)^{(2)}\left(e^3-e^{-3}\right)}{9+(2)^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(2)x\right) - \frac{(2)\pi(-1)^{(2)}\left(e^3+e^{-3}\right)}{9+(2)^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}(2)x\right)$$

En consecuencia, la función buscada es:

$$g(x) = \frac{1}{6}\left(e^3-e^{-3}\right) - \frac{3\left(e^3-e^{-3}\right)}{9+\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + \frac{\pi\left(e^3+e^{-3}\right)}{9+\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

$$+\frac{3\left(e^3-e^{-3}\right)}{9+4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right) - \frac{2\pi\left(e^3+e^{-3}\right)}{9+4\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



Ejemplo: Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } -1<x<0 \\ 1 & \text{si } \quad 0\le x<1 \\ f(x+2) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Utilice los primeros 7 términos diferentes de cero de la serie de Fourier para aproximar a la función f .

Solución: La función f tiene periodo $T=2$, Los coeficientes de la serie de Fourier son los siguientes:

(a) Para a_0 se realiza lo siguiente:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}(1)dx$$
$$=\left[-x\right]_{-1}^{0}+\left[x\right]_{0}^{1}=\left(0+(-1)\right)+\left((1)-0\right)=0$$

(b) Para a_n se realiza lo siguiente:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{2}x\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(-1)\cos(\pi nx)\,dx + \int_{0}^{1}(1)\cos(\pi nx)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}(\pi nx)\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}(\pi nx)\right]_{0}^{1}$$

$$= 0$$

Así, se tiene que $a_n = 0$.

(c) Para b_n se realiza lo siguiente:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{2}x\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(-1)\operatorname{sen}(\pi nx)\,dx + \int_{0}^{1}(1)\operatorname{sen}(\pi nx)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx)\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{\pi n}\cos(\pi nx)\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{\pi n} - \frac{\cos(-n\pi)}{\pi n}\right] + \left[-\frac{\cos(\pi n)}{\pi n} + \frac{1}{\pi n}\right]$$

$$= \frac{2-2(-1)^n}{\pi n}$$

Hay que observar la expresión:

$$2-2(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ 4 & n \text{ es impar} \end{cases}$$

En consecuencia:

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ \dfrac{4}{\pi n} & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente se tiene que $b_{2k-1} = \dfrac{4}{\pi(2k-1)}$.

Por lo tanto la serie de Fourier es de f es:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\pi n x) + b_n \operatorname{sen}(\pi n x) \\
&= \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos(\pi n x) + \left(\frac{4}{\pi(2n-1)}\right)\operatorname{sen}(\pi(2n-1)x)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}(\pi n x)
\end{aligned}
$$

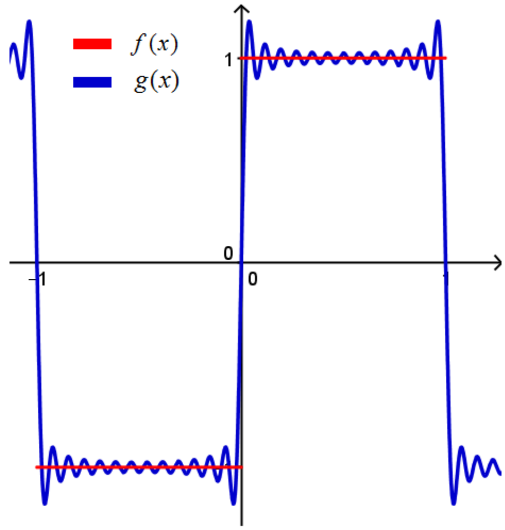
En consecuencia, los primeros siete términos no nulos de la serie anterior son:

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{\pi(2(1)-1)}\operatorname{sen}(\pi(2(1)-1)x) + \frac{4}{\pi(2(2)-1)}\operatorname{sen}(\pi(2(3)-1)x) + \frac{4}{\pi(2(3)-1)}\operatorname{sen}(\pi(2(3)-1)x) \\
&+ \frac{4}{\pi(2(4)-1)}\operatorname{sen}(\pi(2(4)-1)x) + \frac{4}{\pi(2(5)-1)}\operatorname{sen}(\pi(2(5)-1)x) + \frac{4}{\pi(2(6)-1)}\operatorname{sen}(\pi(2(6)-1)x) \\
&+ \frac{4}{\pi(2(7)-1)}\operatorname{sen}(\pi(2(7)-1)x)
\end{aligned}
$$

En consecuencia, la función buscada es:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi x) + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}(5\pi x) + \frac{4}{7\pi}\operatorname{sen}(7\pi x) \\
&+ \frac{4}{9\pi}\operatorname{sen}(9\pi x) + \frac{4}{11\pi}\operatorname{sen}(11\pi x) + \frac{4}{13\pi}\operatorname{sen}(13\pi x)
\end{aligned}
$$

Gráficamente se tiene lo siguiente:



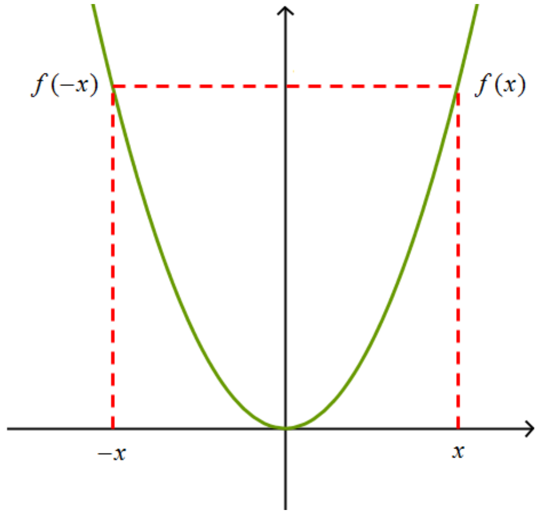
2.2.4. Serie de Fourier de funciones pares e impares

Como habrás visto, hay funciones periódicas que tienen serie de Fourier con exclusivamente cosenos o exclusivamente senos, en esta sección se presenta las condiciones para que esto resulte. Para esto se comienza con la siguiente definición:

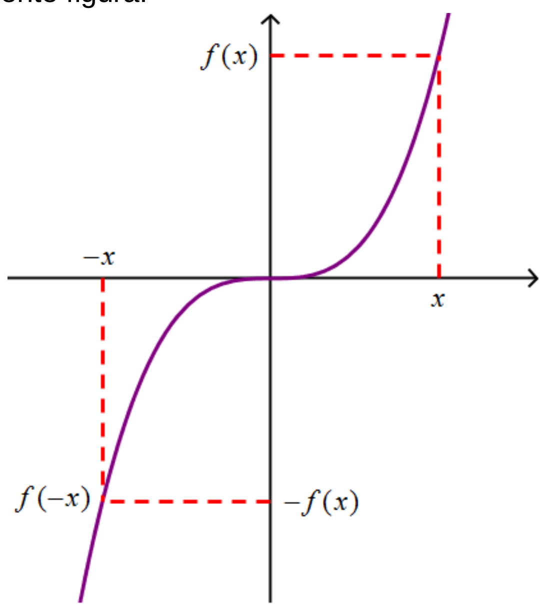
Definición: Sea f una función definida en algún intervalo I centrado en cero, entonces se dice que f es par si y solos si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Por otro lado se dice que f es impar si y solo si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in I$.

Como consecuencia inmediata de la definición anterior se tiene que: Si f es impar entonces $f(0) = f(-0) = -f(0)$, es decir $2f(0) = 0$, por lo tanto $f(0) = 0$.

Gráficamente, una función par es simétrica con respecto al eje vertical, como lo muestra la siguiente figura:



De forma similar, una función impar es simétrica con respecto al origen de coordenadas, como lo muestra la siguiente figura:



Ejemplo: En cursos de trigonometría elemental se muestra que las siguientes relaciones:

$$\cos(-x)=\cos(x) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}(x)$$

Esto afirma que $\cos(x)$ es par y $\operatorname{sen}(x)$ es impar.

La multiplicación de funciones pares e impares satisface la siguiente tabla:

$\times$	P	I
P	P	I
I	P	I

Ejemplo: La tabla anterior a firma que la función $\cos(mx)\cos(nx)$ es par, que la función $\cos(mx)\operatorname{sen}(nx)$ es impar.

Ahora se presenta las propiedades que tienen las funciones pares e impares con respecto a la integral sobre un intervalo centrado en el origen.

Proposición: Sea f una función definida sobre un intervalo I centrado en 0. Si f es par, entonces para cualquier $a \in I$ con $a > 0$ se cumple que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Demostración: Para mostrar estoy solo basta observar lo siguiente:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Luego tomando $u = -x$ se tiene que:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0} f(u)du = \int_{0}^{a} f(u)du$$

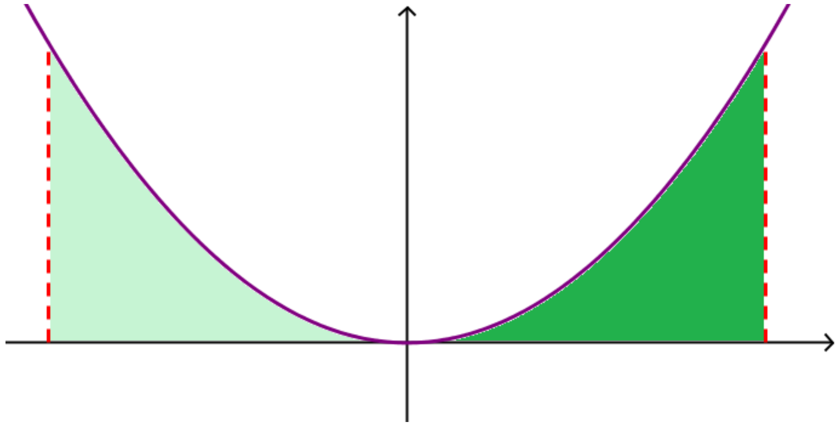
Por consiguiente:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Por lo tanto:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx .$$

Este resultado se puede obtener de forma gráfica, observando la simetría con respecto al eje vertical, como lo muestra la siguiente figura:



Existe un resultado similar al anterior para funciones impares, el cual se enuncia a continuación:

Proposición: Sea f una función definida sobre un intervalo I centrado en 0. Si f es impar, entonces para cualquier $a \in I$ con $a > 0$ se cumple que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Demostración: De formar similar a la prueba anterior se comienza con la siguiente relación:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Luego tomando $u = -x$ se tiene que:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = -\int_{a}^{0}(-f(u))du = -\int_{0}^{a} f(u)du$$

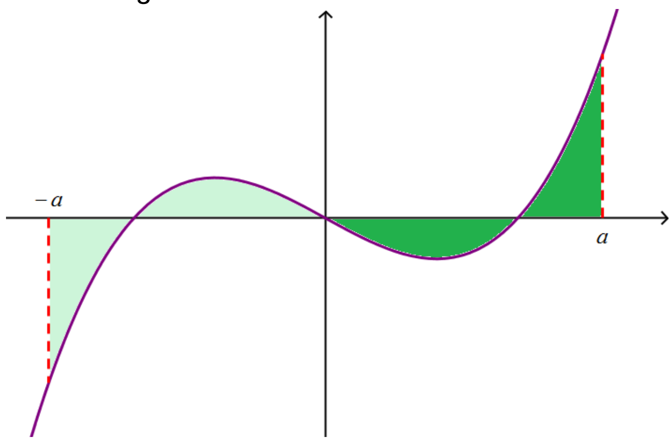
Por consiguiente:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Por lo tanto

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0\,.$$

De forma gráfica se tiene lo siguiente:



Ahora se aplican las dos proposiciones anteriores para el cálculo de los coeficientes de funciones pares e impares.

Teorema: Sea f una función periódica de periodo T, supóngase que:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

es su representación en serie de Fourier. Si f es par, entonces $b_n=0$ para todo $n\geq 1$, similarmente, si f es impar, entonces $a_n=0$ para todo $n\geq 0$.

Demostración: supóngase que f es par, dado que la función $f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ es impar se tiene que:

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx=0$$

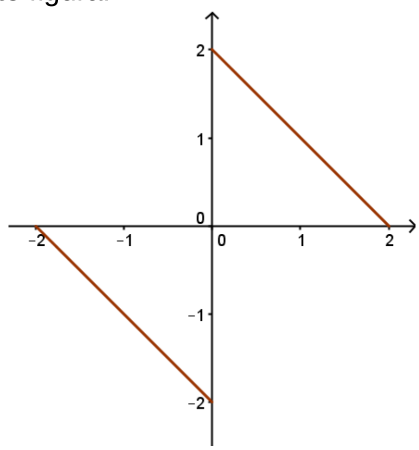
De manera similar si f es impar se tiene que:

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx=0$$

Además la función $f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ es impar, lo que implica que:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = 0\,.$$

Ejemplo: Calcular la serie de Fourier de la función f cuya grafica en el intervalo base está dada en la siguiente figura:



Solución: Primero hay que observa que la función f es periódica de periodo $T=4$ y es definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{si } -2<x<0 \\ -x+2 & \text{si } \ 0<x<2 \end{cases}$$

Además, f es impar ya que es simétrica con respecto al origen de coordenadas, por consiguiente $a_0=0$ para todo $n \geq 0$. Así, solo resta calcular los valores de b_n, para hay que observar que la función $f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ es par, lo cual implica lo siguiente:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}nx\right)dx = \frac{1}{2}\left[2\int_{0}^{2} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx\right]$$

$$= \int_0^2 (-x+2)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx = \left[\left(-\frac{4}{n\pi}+\frac{2x}{n\pi}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{4}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$= \left[\left(-\frac{4}{n\pi}+\frac{2(2)}{n\pi}\right)\cos(n\pi)\right] - \left[-\frac{4}{n\pi}\right]$$

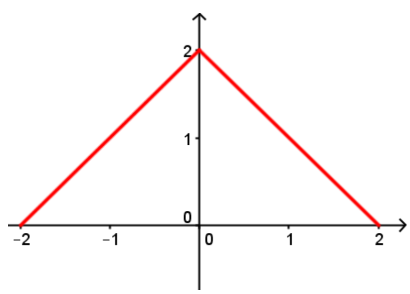
$$= \frac{4}{n\pi}$$

Es decir $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$. Por consiguiente la serie de Fourier de f es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)$$

Ejemplo: Calcular la serie de Fourier de la función f cuya grafica en el intervalo fundamental está dada en la siguiente figura:



Solución: Primero hay que observa que la función f es periódica de periodo $T=4$ y es definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } -2<x<0 \\ -x+2 & \text{si } 0<x<2 \end{cases}$$

Además, f es par ya que es simétrica con respecto al eje vertical, por consiguiente $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Así, solo resta calcular los valores de a_n para $n \geq 0$, tomando

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left[2\int_0^2 f(x)dx\right] = \int_0^2 (-x+2)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 = -\frac{1}{2}(2)^2 + 2(2) = 2$$

Luego, la función $f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$ es par, lo cual implica lo siguiente:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{4}nx\right)dx = \frac{1}{2}\left[2\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx\right]$$

$$= \int_0^2 (-x+2)\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx = \left[-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \left(\frac{4}{n\pi} - \frac{2x}{n\pi}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$= \left[-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\right] - \left[-\frac{4}{n^2\pi^2}\right] = \frac{4}{n^2\pi^2}\left(-(-1)^n + 1\right)$$

La expresión:

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ 2 & n \text{ es impar} \end{cases}$$

En consecuencia

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ es par} \\ \dfrac{8}{\pi^2 n^2} & n \text{ es impar} \end{cases}$$

Finalmente se tiene que $a_{2k-1} = \dfrac{8}{\pi^2(2k-1)^2}$. Por consiguiente la serie de Fourier de f es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(2n-1)x\right)$$

2.3. Aproximación en media

Para comenzar esta sección, se presenta la definición de distancia entre dos funciones, la cual es análoga a la distancia entre dos vectores tridimensionales. Para vectores en $\mathbb{R}^3$ la distancia entre punto α y el punto β se define por:

$$d(\alpha,\beta)=\|\alpha-\beta\|$$

Análogamente, se define la distancia para elemento de $\mathrm{C}[a,b]$, de la siguiente manera:

Definición: Dadas $f,g\in\mathrm{C}[a,b]$ la distancia de f a g es:

$$d(f,g)=\|f-g\|=\sqrt{\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)^2dx}\,.$$

2.3.1. Desviación máxima

Como se vio en la sección anterior, una función periódica pude ser aproximada por un número finito de elementos de su serie de Fourier, en esta sección se presenta una forma de calcular dicha aproximación.

Como se vio en la sección anterior, para una función continua a pedazos f de periodo T su serie de Fourier es:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Donde

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\quad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx\quad b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

Sea $\Phi_N(x)$ la N-ésima suma parcial de la serie de Fourier, es decir:

$$\Phi_N(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Luego sustituyendo los valores a_0 , a_n y b_n junto con la identidad trigonométrica:

$$\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\operatorname{sen}(A)\operatorname{sen}(B)$$

se llega a la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\Phi_N(x)&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right]dt\\&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\frac{2\pi}{T}n(t-x)\right)\right]dt\end{aligned}$$

Considerando la relación:

$$\operatorname{sen}(A)-\operatorname{sen}(B)=2\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

Implica las siguientes relaciones:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{T}n(t-x)\right]=\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]-\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}n-\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]$$

Es decir

$$\cos\left[\frac{2\pi}{T}n(t-x)\right]=\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]-\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}n-\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}$$

Luego se sigue que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos\left[\frac{2\pi}{T}n(t-x)\right]&=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]-\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}n-\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}\\&=\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}N+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Sustituyendo esta última expresión se tiene que:

$$\Phi_N(x)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}N+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt$$

Esta es una manera de calcular la suma parcial Φ_n de una serie de Fourier a través de una integral, esta integra toma el nombre de **Integral de Dirichlet**. En la práctica no es fácil calcular dicha integral, pero existen métodos como la regla de los trapecios o la regla de Simpson que permiten aproximar el valor de dicha integral adecuadamente.

Ejemplo: Dada la función periódica definida en el intervalo base por $f(x)=2$ si $-2<x<0$ y $f(x)=-2$ si $0<x<2$. Calcular:

$$\int_{-2}^{2} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(4\pi+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx\,.$$

Solución: Hay que observar que la integral

$$\int_{-2}^{2} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(4\pi+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx$$

Tiene la forma de la integral:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}N+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt$$

Identificando las expresiones se tiene que $T=4$ y $N=8$. En consecuencia:

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(4\pi+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx=\Phi_8(x)$$

Ahora hay que calcular la serie de Fourier de f , para esto observa que f es impar lo que implica que $a_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Para los coeficientes b_n se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{4}nx\right)dx = \frac{1}{2}\left[2\int_{0}^{2}(-2)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right)dx\right] \\
&= \left[\frac{4}{\pi n}\cos\left(\frac{\pi}{2}nx\right)\right]_0^2 = \frac{4}{\pi n}\cos(\pi n) - \frac{4}{\pi n} \\
&= \frac{4}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)
\end{aligned}
$$

Luego se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\Phi_8(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{8} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \\
&= \sum_{n=1}^{8}\frac{4}{\pi n}\left((-1)^n - 1\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}nx\right) \\
&= -\frac{8}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{8}{3\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \frac{8}{5\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \frac{8}{7\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Tienes que observar que también se toman en cuenta los coeficientes iguales a cero.
Finalmente, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\frac{\mathrm{sen}\left[\left(4\pi + \frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\mathrm{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx &= -\frac{8}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{8}{3\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \\
&\quad - \frac{8}{5\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right) - \frac{8}{7\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Por consiguiente:

$$
\int_{-2}^{2} f(t)\frac{\mathrm{sen}\left[\left(4\pi + \frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\mathrm{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx = -\frac{32}{\pi}\left[\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \frac{1}{7}\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi x}{2}\right)\right]
$$

Ejemplo: Dada la función periódica definida en el intervalo base por $f(x) = -x$ si $-1 < x < 0$ y $f(x) = x$ si $0 < x < 1$. Calcular:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(3\pi+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx\,.$$

Solución: Se procede de forma análoga al ejemplo anterior, observando que la expresión:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(3\pi+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx$$

Es similar a la integral:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{T}N+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt$$

Lo que permite obtener que $T=2$ y $N=3$. En consecuencia:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(3\pi+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx=\Phi_3(x)$$

Toca el turno de calcular la serie de Fourier de f, para esto observa que $b_n=0$ para toda $n\in\mathbb{N}$ ya que f es par. Para el coeficiente a_0 se tiene lo siguiente:

$$a_0=\frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} xdx=2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=2\left[\frac{1}{2}\right]=1$$

Para los restantes coeficientes a_n se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{2}nx\right)dx = 2\int_{0}^{1} x\cos(\pi nx)\,dx \\ &= 2\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)+\frac{x}{n\pi}\operatorname{sen}(n\pi x)\right]_0^1 \\ &= 2\left[\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\right)-\left(\frac{1}{n^2\pi^2}\right)\right] \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right) \end{aligned}$$

Luego se tiene que:

$$\begin{aligned} \Phi_3(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{3} a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)+b_n\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \\ &= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{3}\frac{2}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \\ &= \frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos(\pi x)-\frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi v) \end{aligned}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, también se toman en cuenta los coeficientes iguales a cero. Finalmente, se tiene que:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[\left(3\pi+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left(\frac{t-x}{2}\right)}dx = 1-\frac{8}{\pi^2}\cos(\pi x)-\frac{8}{9\pi^2}\cos(3\pi v).$$

2.3.2. Desviación media cuadrática

Dada una función f continua a pedazos definida sobre el intervalo base (a,b), dado un conjunto ortogonal de funciones continuas a pedazos $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre (a,b), con $\{\phi_n\}$ un conjunto ortogonal de funciones. Dado $N\in\mathbb{N}$ se toma la combinación lineal de los primeros N elementos del conjunto $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\Phi_N(x)=\gamma_0\phi_0(x)+\gamma_1\phi_1(x)+\cdots+\gamma_N\phi_N(x)$$

Donde $a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$.

El siguiente número:

$$\| f - \Phi_N \|^2 = \int_a^b \left[f(x) - \Phi_n(x) \right]^2 dx$$

Mide la desviación cuadrática de la función Φ_n de la función f en el intervalo base (a,b).

El objetivo de esto es encontrar los valores γ_n de tal forma que $E_N = \| f - \Phi_n \|^2$ sea lo **menor posible**, el número E_N toma el nombre de **error medio cuadrático**.

Observa que:

$$\left[f(x) - \Phi_N(x) \right]^2 = \left[f(x) \right]^2 - 2 f(x)\Phi_N(x) + \left[\Phi_N(x) \right]^2 .$$

Tomando el error cuadrático se tiene:

$$\begin{aligned} E_N = \| f - \Phi_N \|^2 &= \int_a^b \left[f(x) - \Phi_N(x) \right]^2 dx \\ &= \int_a^b \left(\left[f(x) \right]^2 - 2 f(x)\Phi_N(x) + \left[\Phi_N(x) \right]^2 \right) dx \\ &= \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx - 2\int_a^b f(x)\Phi_N(x)dx + \int_a^b \left[\Phi_N(x) \right]^2 dx \\ &= \| f(x) \|^2 - 2\langle f, \Phi_N \rangle + \| \Phi_N \|^2 \end{aligned}$$

Luego, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_N, \Phi_N \rangle &= \int_a^b \left[\Phi_N(x) \right]^2 dx = \int_a^b \left(\gamma_0\phi_0(x) + \gamma_1\phi_1(x) + \cdots + \gamma_N\phi_N(x) \right)^2 dx \\ &= \int_a^b \left(\left(\gamma_0\phi_0(x) \right)^2 + \cdots + \left(\gamma_N\phi_N(x) \right)^2 + 2\sum_{m \neq n} \gamma_m\gamma_n\phi_m(x)\phi_n(x) \right) dx \\ &= \gamma_0^{\;2} + \cdots + \gamma_N^{\;2} \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \langle f, \Phi_N \rangle &= \int_a^b f(x)\Phi_N(x)dx = \int_a^b f(x)\left[\gamma_0\phi_0(x) + \gamma_1\phi_1(x) + \cdots + \gamma_N\phi_N(x) \right] dx \\ &= \gamma_0\int_a^b f(x)\phi_0(x)dx + \cdots + \gamma_N\int_a^b f(x)\phi_N(x)dx \\ &= \gamma_0 a_0 + \cdots + \gamma_N a_n \end{aligned}$$

Donde a_n son los coeficientes de Fourier de la función f en el conjunto ortogonal $\{\phi_n\}$.
Esto implica que:

$$\begin{aligned}
E_N &= \|f\|^2 - 2\langle f, \Phi_N \rangle + \|\Phi_n\| \\
&= \|f\|^2 - 2(\gamma_0 a_0 + \cdots + \gamma_N a_n) + (\gamma_0{}^2 + \cdots + \gamma_N{}^2) \\
&= \|f\|^2 + (a_0{}^2 + \cdots + a_N{}^2) - 2(\gamma_0 a_0 + \cdots + \gamma_N a_n) + (\gamma_0{}^2 + \cdots + \gamma_N{}^2) - (a_0{}^2 + \cdots + a_N{}^2) \\
&= \|f\|^2 + (a_0{}^2 - 2\gamma_0 a_0 + \gamma_0{}^2) + \cdots + (a_n{}^2 - 2\gamma_n a_n + \gamma_n{}^2) - (a_0{}^2 + \cdots + a_N{}^2) \\
&= \|f\|^2 + (a_0 - \gamma_0)^2 + \cdots + (a_n - \gamma_n)^2 - (a_0{}^2 + \cdots + a_N{}^2)
\end{aligned}$$

La última relación afirma que el error medio cuadrático es mínimo cuando:

$$(a_0 - \gamma_0)^2 + \cdots + (a_n - \gamma_n)^2 = 0$$

Lo que implica que:

$$\gamma_0 = a_0 \quad \gamma_1 = a_1 \quad \ldots \quad \gamma_N = a_N$$

Lo anterior demuestra el siguiente resultado:

Teorema: Dados $f \in C[a,b]$ y $\{\phi_n\}$ un conjunto ortonormal de funciones definidas en el intervalo fundamental (a,b). Sean $\{a_n\}$ los coeficientes de Fourier en la base $\{\phi_n\}$, para el conjunto finito de funciones $\phi_0,\ldots,\phi_N$ la combinación:

$$a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_N\phi_N(x)$$

Es la que minimiza el error medio cuadrático en el intervalo (a,b).
Por tal motivo **el error medio cuadrático** se define por:

$$E_N = \|f\|^2 - (a_0{}^2 + \cdots + a_N{}^2)$$

Finalmente, como $E_N = \|f - \Phi_N\|^2 \geq 0$ trae como consecuencia que:

$$\|f\|^2 - (a_0{}^2 + \cdots + a_N{}^2) \geq 0$$

$$\|f\|^2 \geq a_0{}^2 + \cdots + a_N{}^2$$

Como la relación anterior es independiente del valor N, N puede ser tan grande como se desee, lo que implica que:

$$a_0^2 + \cdots + a_N^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \leq \| f \|^2$$

Con todo lo anterior se ha demostrado el siguiente resultado:

Teorema: Dados $f \in \mathrm{C}[a,b]$ y $\{\phi_n\}$ un conjunto ortonormal de funciones definidas en el intervalo fundamental (a,b). Sean $\{a_n\}$ los coeficientes de Fourier en la base $\{\phi_n\}$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \leq \| f \|^2 .$$

Esta relación se conoce como **la desigual de Bessel**.

Como $\| f \|$ es finito, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ es convergente, así $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, \phi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx = 0$$

En particular, para la serie trigonométrica de Fourier de una función periódica de periodo T, se requiere del conjunto ortogonal:

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right), \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right\}$$

Como se vio en la sección anterior, para una función continua a pedazos f de periodo T su serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Donde:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

Sea $\Phi_N(x)$ la N-ésima suma parcial de la serie de Fourier, es decir:

$$\Phi_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Donde $x \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$. Luego:

$$\|\Phi_N\| = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right)^2 dx$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{a_0^{\,2}}{4} + \sum_{n=1}^{N} a_n^{\,2} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n^{\,2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + 2\sum_{n\neq m} \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}mx\right)\right) dx$$

$$= \frac{a_0^{\,2}}{4}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dx + \left[\sum_{n=1}^{N} a_n^{\,2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx + b_n^{\,2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx\right]$$

$$= \frac{a_0^{\,2}}{4}(T) + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n^{\,2}\left(\frac{T}{2}\right) + b_n^{\,2}\left(\frac{T}{2}\right)\right] = \frac{T}{2}\left[\frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\right)\right]$$

El elemento $\frac{T}{2}$ se obtiene porque el conjunto $\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right\}$ no es normalizado, por consiguiente el error medio cuadrático:

$$E_N = \frac{2}{T}\|f\|^2 - \left[\frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\right)\right]$$

Luego, la desigualdad de Bessel garantiza que:

$$\left[\frac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\right)\right] \le \frac{2}{T}\|f\|^2 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\,f(x)]^2\, dx$$

Ejemplo: Hallar el error medio cuadrático de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le \pi \\ f(x+2\pi) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y la función Φ que está formada por los primeros seis términos no nulos de la serie de Fourier.

Solución: En la sección anterior se presenté que la función

$$f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si } -\pi<x<0 \\ x & \text{si } 0\le x\le \pi \\ f(x+2\pi) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

tiene periodo $T=2\pi$ y su serie de Fourier es:

$$f(x)=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\left((2n-1)x\right)+\frac{2-2(-1)^n-\pi(-1)^n}{n\pi}\operatorname{sen}(nx)\right]$$

Donde:

$$a_0=\frac{\pi}{2}-2 \qquad a_{2n-1}=-\frac{2}{(2n-1)^2\pi} \qquad b_n=\frac{2-2(-1)^n-\pi(-1)^n}{n\pi}$$

Lo que implica que:

$$\Phi(x)=\left(\frac{\pi}{4}-1\right)-\frac{2}{\pi}\cos(x)-\frac{2}{9\pi}\cos(3x)+\frac{4+\pi}{\pi}\operatorname{sen}(x)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)+\frac{4+\pi}{3\pi}\operatorname{sen}(3x)$$

De donde se obtiene que:

$$a_0=\frac{1}{2}(\pi-4) \qquad a_1=-\frac{2}{\pi} \qquad a_3-\frac{2}{9\pi}$$

$$b_1=\frac{4+\pi}{\pi} \qquad b_2=-\frac{1}{2} \qquad b_3=\frac{4+\pi}{3\pi}$$

En consecuencia:

$$a_0^2=\frac{1}{4}(\pi-4)^2 \qquad a_1^2=\frac{4}{\pi^2} \qquad a_3^2=\frac{4}{81\pi^2}$$

$$b_1^2=\frac{(4+\pi)^2}{\pi^2} \qquad b_2^2=\frac{1}{4} \qquad b_3^2=\frac{(4+\pi)^2}{9\pi^2}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\frac{2}{T}\|f\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}[-2]^2\,dx+\int_{0}^{\pi}[x]^2\,dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[4[x]_{-\pi}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[4\pi+\frac{\pi^3}{3}\right]=4+\frac{\pi^2}{3}$$

Por consiguiente el error medio cuadrático es:

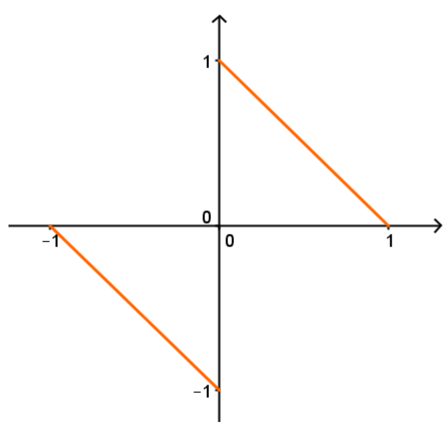
$$
\begin{aligned}
E &= \frac{2}{T}\|f\|^2 - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right) \\
&= \left[4 + \frac{\pi^2}{3}\right] - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{8}(\pi - 4)^2 + \frac{328}{81\pi^2} + \frac{10(4+\pi)^2}{9\pi^2}\right] \\
&\approx 0.7957
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Hallar el error medio cuadrático de la función periódica definida en el intervalo base por:

$$
f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}
$$

Y la función Φ que está formada por los primeros siete términos no nulos de la serie de Fourier.

Solución: Primer la función f es periódica de periodo $T = 2$ y su gráfica en el intervalo fundamental se presenta en la siguiente figura:



La figura muestra que f es impar, lo que implica que $a_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego:

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx = 2\int_{0}^{1} f(x)\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx = 2\int_{0}^{1}(-x+1)\operatorname{sen}(\pi n x)\,dx \\
&= 2\left[-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x) + \frac{x}{n\pi}\cos(n\pi x) - \frac{1}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}(n\pi x)\right]_0^1 \\
&= 2\left[\left(-\frac{1}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi)\right) - \left(-\frac{1}{n\pi}\right)\right] = \frac{2}{n\pi}
\end{aligned}$$

En consecuencia la serie de Fourier es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}(\pi n x)$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) = {} & \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi x) + \frac{2}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi x) + \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}(4\pi x) \\
& + \frac{2}{5\pi}\operatorname{sen}(5\pi x) + \frac{1}{3\pi}\operatorname{sen}(6\pi x) + \frac{2}{7\pi}\operatorname{sen}(7\pi x)
\end{aligned}$$

De donde se obtiene que:

$$b_1 = \frac{2}{\pi} \qquad b_2 = \frac{1}{\pi} \qquad b_3 = \frac{2}{3\pi} \qquad b_4 = \frac{1}{2\pi} \qquad b_5 = \frac{2}{5\pi} \qquad b_6 = \frac{1}{3\pi} \qquad b_7 = \frac{2}{7\pi}$$

En consecuencia:

$$b_1^2 = \frac{4}{\pi^2} \quad b_2^2 = \frac{1}{\pi^2} \quad b_3^2 = \frac{4}{9\pi^2} \quad b_4^2 = \frac{1}{4\pi^2} \quad b_5^2 = \frac{4}{25\pi^2} \quad b_6^2 = \frac{1}{9\pi^2} \quad b_7^2 = \frac{4}{49\pi^2}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{T}\|f\|^2 &= \int_{-1}^{1}[f(x)]^2\,dx = 2\int_{0}^{1}(-x+1)^2\,dx = 2\int_{0}^{1}\left(x^2 - 2x + 1\right)dx \\
&= 2\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3} - 1 + 1\right] = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por consiguiente el error medio cuadrático es:

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{2}{T}\|f\|^2 - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2 + b_n^2\right)\right) \\
&= \left[\frac{2}{3}\right] - \left[\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{9\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{4}{25\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{4}{49\pi^2}\right] \\
&= \frac{266681}{44100\pi^2} \approx 0.05395
\end{aligned}
$$

2.3.3. Igualdad de Parseval-Liapunov

La igualdad de Parseval-Liapunov establece la relación que hay entre los coeficientes de la serie de Fourier y la integral del cuadrado de la misma función, esta es una consecuencia de la desigualdad de Bessel.

Teorema: Dados $f \in \mathrm{C}[a,b]$ y $\{\phi_n\}$ un conjunto ortonormal de funciones definidas en el intervalo fundamental (a,b). Sean $\{a_n\}$ los coeficientes de Fourier en la base $\{\phi_n\}$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{\,2} = \|f\|^2 \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{N\to\infty} E_N = 0.$$

Demostración: Esto se obtiene rápidamente de tomar $N \to \infty$ en la relación:

$$E_N = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} a_n^{\,2}.$$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente resultado.

Corolario: Sea f una función continua a pedazos y periódica de periodo T con serie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)$$

Entonces $\dfrac{a_0^{\,2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\,2} + b_n^{\,2}\right) = \dfrac{2}{T}\|f\|^2$ si y solo si $\lim_{N\to\infty} E_N = 0$.

Otra importante consecuencia se presenta a continuación.

Corolario: Supóngase que f que satisface las hipótesis del corolario anterior. Si f es par, entonces:

$$\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2=\frac{2}{T}\|f\|^2=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}[f(x)]^2\,dx\,.$$

De forma similar, si f es impar entonces:

$$\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^2=\frac{2}{T}\|f\|^2=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}[f(x)]^2\,dx\,.$$

Ejemplo: Aplicar la igualdad de Parseval-Liapunov a la serie de Fourier de la función definida en el intervalo fundamental $(-\pi,\pi)$ por $f(x)=x+\frac{1}{4}x^2$ para calcular $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+4n^2}{n^4}$.

Solución: La función f tiene periodo $T=2\pi$, los coeficientes de Fourier son los siguientes: para el coeficiente a_0:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+\frac{1}{4}x^2\right)dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{12}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2}(\pi)^2+\frac{1}{12}(\pi)^3\right)-\left(\frac{1}{2}(-\pi)^2+\frac{1}{12}(-\pi)^3\right)\right]=\frac{\pi^2}{6}$$

Para los coeficientes a_n:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+\frac{1}{4}x^2\right)\cos(nx)dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2n(2+x)\cos(nx)+\left(-2+n^2x(4+x)\right)\operatorname{sen}(nx)}{4n^3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2n(2+\pi)\cos(n\pi)}{4n^3}\right)-\left(\frac{2n(2-\pi)\cos(n\pi)}{4n^3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2n(2+\pi)(-1)^n}{4n^3}\right)-\left(\frac{2n(2-\pi)(-1)^n}{4n^3}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Para los coeficientes b_n :

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+\frac{1}{4}x^2\right)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\left(2-n^2x(4+x)\right)\cos(nx)+2n(2+x)\operatorname{sen}(nx)}{4n^3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\left(2-n^2\pi(4+\pi)\right)\cos(n\pi)}{4n^3}\right)-\left(\frac{\left(2+n^2\pi(4-\pi)\right)\cos(-n\pi)}{4n^3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\left(2-n^2\pi(4+\pi)\right)(-1)^n}{4n^3}\right)-\left(\frac{\left(2+n^2\pi(4-\pi)\right)(-1)^n}{4n^3}\right)\right] = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

En consecuencia la serie de Fourier de f es:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)-\frac{2(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(nx)$$

La igual de Parseval-Liapunov afirma que:

$$\frac{a_0{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2+b_n{}^2\right)=\frac{2}{T}\|f\|^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)^2+\left(-\frac{2(-1)^n}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx$$

$$\frac{\pi^4}{72}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{4}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^5}{80}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+4n^2}{n^4}=\left(\frac{2\pi^2}{3}+\frac{\pi^4}{40}\right)-\frac{\pi^4}{72}$$

Por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+4n^2}{n^4}=\frac{\pi^2}{90}\left(60+\pi^2\right)$.

Ejemplo: Utilizando la serie de Fourier de la función periódica definida en el intervalo fundamental $(-1,1)$ por $f(x)=x^2$, para calcular la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Solución: Es fácil ver que el periodo de f es $T=2$ y que f es par, en consecuencia $b_n=0$ para toda $n\in\mathbb{N}$. Luego:

$$a_0=\int_{-1}^{1} f(x)dx=2\int_{0}^{1} x^2 dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

Además:

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx=2\int_{0}^{1} x^2\cos(n\pi x)dx=$$

$$=2\left[\frac{2n\pi x\cos(n\pi x)+(-2+n^2\pi^2x^2)\operatorname{sen}(n\pi x)}{n^3\pi^3}\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{2n\pi\cos(n\pi)}{n^3\pi^3}\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

La identidad de Parseval, en el caso par, implica las siguientes relaciones:

$$\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}[f(x)]^2dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\right)^2=\frac{4}{2}\int_0^1\left[x^2\right]^2dx$$

$$\frac{2}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}=2\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$\frac{2}{9}+\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{2}{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{16}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Ejemplo: Utilizando la serie de Fourier de la función periódica definida por secciones en el intervalo fundamental por $f(x) = -1$ si $-2 < x < 0$ y $f(x) = 1$ si $0 < x < 2$, para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{18}$.

Solución: Es fácil ver que el periodo de f es $T = 4$ y que f es impar, en consecuencia $a_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego:

$$b_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left[2\int_{0}^{2}(1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right] = \left[-\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2$$

$$= \left(-\frac{2}{n\pi}\cos(\pi n) + \frac{2}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

Por consiguiente:

$$b_{2n-1} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

El resultado se obtiene de aplicar la identidad de Parseval para el caso de una función impar del siguiente modo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{\,2} = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} [f(x)]^2\,dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n-1)\pi}\right)^2 = \frac{4}{4}\int_{0}^{2}[1]^2\,dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{(2n-1)^2\pi^2} = [x]_0^2$$

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{18}$$

Actividades

La elaboración de las actividades estará guiada por tu docente en línea, mismo que te indicará, a través de la *Planificación de actividades*, la dinámica que tú y tus compañeros (as) llevarán a cabo, así como los envíos que tendrán que realizar.

Para el envío de tus trabajos usarás la siguiente nomenclatura: BMAI_U2_A1_XXYZ, donde BMAI corresponde a las siglas de la asignatura, U2 es la unidad de conocimiento, A1 es el número de actividad, el cual debes sustituir considerando la actividad que se realices, XX son las primeras letras de tu nombre, Y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno.

Autorreflexiones

Para la parte de **autorreflexiones** debes responder las *Preguntas de Autorreflexión* indicadas por tu docente en línea y enviar tu archivo. Cabe recordar que esta actividad tiene una ponderación del 10% de tu evaluación.

Para el envío de tu autorreflexión utiliza la siguiente nomenclatura:

BMAI_U2_ATR _XXYZ, donde BMAI corresponde a las siglas de la asignatura, U2 es la unidad de conocimiento, XX son las primeras letras de tu nombre, y la primera letra de tu apellido paterno y Z la primera letra de tu apellido materno

Cierre de la Unidad

En esta Unidad aprendiste la definición y las propiedades del producto interno y como este caracteriza la ortogonalidad de funciones, luego estudiaste funciones periódicas y sus propiedades fundamentales. Luego estudiaste el concepto la serie de Fourier trigonométrica y su generalización de una función periódica. Finalmente, aprendiste a calcular el error medio cuadrático de una aproximación junto con la desigualdad de Bessel y la identidad de Parseval-Liapunov.

Para saber más

Para más tener ejemplos de series de Fourier de funciones periódicas puedes consultar las siguientes páginas:

- *http://www.fourier-series.com/*
- *https://math24.net/fourier-series-definition-typical-examples.html*

Fuentes de consulta

- Churchill, R., Brown, J. (2011). *Fourier series and boundary valued problems*. 8 edición, USA: Mc Graw Hill.

- Dyke, P. (2004). *An introduction to Laplace transforms and Fourier series.* Great Britain: Springer-Verlag.
- Spiegel, M. (2010), *Formulas y tablas de matemáticas aplicadas, 3a edición*. México: Mc Graw Hill.

- Spiegel, M. (1964). *Transformadas de Laplace*. México: Mc Graw Hill.
- Tolstov, G. (1976). *Fourier series*. USA: Dover publications.
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, 9a edición*. México: Mc Graw Hill.