

# Experimentación

# Experimentación

Una introducción  
a la teoría de mediciones  
y al diseño de experimentos  
Segunda edición

D. C. Baird

Royal Military College, Kingston, Ontario

## TRADUCCION

*Jesús Castro Peña*

*Coordinador Académico-Lab. de Física*

*Universidad Autónoma Metropolitana-U.A.*

## REVISION TECNICA

*Juan Américo González Menéndez*

*Profesor de la Facultad de Ciencias*

*UNAM*



MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE  
ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

**EDICION EN INGLES**

Cover design: Ben Santora  
Manufacturing buyer: Paula Benevento

**EXPERIMENTACION: UNA INTRODUCCION A LA TEORIA DE MEDICIONES  
Y AL DISEÑO DE EXPERIMENTOS**

---

Traducido de la segunda edición en inglés de:

**EXPERIMENTATION: AN INTRODUCTION TO MEASUREMENT THEORY  
AND EXPERIMENT DESIGN**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o método sin autorización escrita del editor

**DERECHOS RESERVADOS © 1991** respecto a la primera edición en español por  
**PRENTICE-HALL HISPANOAMERICANA, S. A.**

Calle 4 N° 25-2° piso Fracc. Ind. Alce Blanco,  
Naucalpan de Juárez, Edo. de México,  
C.P. 53370

**ISBN 968-880-223-9**

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, **Reg. Núm. 1524**

Original English Language Edition Published by  
Copyright © MCMLXXXVIII by Prentice-Hall, Inc.  
All Rights Reserved

**ISBN 0-13-295338-2**

**IMPRESO EN MEXICO/PRINTED IN MEXICO**



---

IMPRESORA ROMA  
TOMAS VAZQUEZ No. 152  
COL. SAN PEDRO IXTACALCO C. P. 08220  
MEXICO, D. F.

---



**A MARGARET**

# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>xi</b>
<b>1 Enfoque del trabajo de laboratorio</b>	<b>1</b>
<b>2 Medición e incertidumbre</b>	<b>8</b>
2-1 Naturaleza básica del proceso de medición	8
2-2 Presentación digital y redondeo	10
2-3 Incertidumbre absoluta y relativa	11
2-4 Error sistemático	12
2-5 Incertidumbre en cantidades calculadas	13
2-6 Incertidumbre en funciones de una sola variable	14
2-7 Método general para la incertidumbre en funciones de una sola variable	15
2-8 Incertidumbre en funciones de dos o más variables	18
2-9 Método general para la incertidumbre en funciones de dos o más variables	20
2-10 Compensación de errores	23

- 2-11 Cifras significativas 23
- Problemas 24

### **3 Estadística de la observación 26**

- 3-1 Incertidumbre estadística 26
- 3-2 Histogramas y distribuciones 27
- 3-3 Valores centrales de las distribuciones 29
- 3-4 Amplitud de las distribuciones 30
- 3-5 Importancia de la media y la desviación estándar 32
- 3-6 Distribución de Gauss y muestreo 34
- 3-7 Relación entre la distribución de Gauss y las observaciones reales 35
- 3-8 Media de la muestra y desviación estándar de la media 38
- 3-9 Desviación estándar de la muestra 39
- 3-10 Aplicación de la teoría de muestreo a las mediciones reales 40
- 3-11 Efecto del tamaño de la muestra 41
- 3-12 Desviación estándar de valores calculados 43
- 3-13 Desviación estándar de valores calculados: casos especiales 46
- 3-14 Combinación de distintos tipos de incertidumbre 49
- 3-15 Rechazo de resultados 50
- Problemas 51

### **4 Pensamiento científico y experimentación 54**

- 4-1 Observaciones y modelos 54
- 4-2 Construcción de modelos 61
- 4-3 Prueba de modelos teóricos 70
- 4-4 Uso del análisis de líneas rectas 76
- 4-5 El caso de las constantes indeterminadas 78

### **5 Diseño de experimentos 83**

- 5-1 Cómo probar un modelo existente 83
- 5-2 Ecuaciones con gráfica en forma de línea recta 85

- 5-3 Planeación de experimentos 92
- 5-4 Diseño de experimentos cuando no existe un modelo 98
- 5-5 Análisis dimensional 99
- 5-6 Mediciones del tipo de diferencias 102
- 5-7 Experimentos sin control sobre las variables de entrada 105
- Problemas 107

## **6 Evaluación de experimentos**

**111**

- 6-1 Enfoque general 111
- 6-2 Las etapas de la evaluación del experimento 113
- 6-3 Gráficas 116
- 6-4 Comparación entre modelos existentes y sistemas 117
- 6-5 Cálculo de valores a partir del análisis de líneas rectas 122
- 6-6 Casos de correspondencia imperfecta entre el sistema y el modelo 127
- 6-7 El principio de mínimos cuadrados 128
- 6-8 Ajuste por mínimos cuadrados de funciones no lineales 132
- 6-9 Precauciones con el ajuste por mínimos cuadrados 133
- 6-10 Búsqueda de funciones 134
- 6-11 Representación polinomial 136
- 6-12 Precisión global del experimento 137
- 6-13 Cifras significativas 139
- 6-14 El concepto de correlación 140
- Problemas 144

## **7 Redacción de informes científicos**

**149**

- 7-1 La buena redacción es importante 149
- 7-2 El título 151
- 7-3 El formato 151
- 7-4 La introducción 152
- 7-5 El procedimiento 154
- 7-6 Resultados 157
- 7-7 Las gráficas 159
- 7-8 El análisis 159

## **Apéndices**

<b>1</b>	<b>Propiedades matemáticas de la distribución normal o de Gauss</b>	<b>164</b>
A1-1	La ecuación de la curva de distribución de Gauss	164
A1-2	Desviación estándar de la distribución de Gauss	169
A1-3	Áreas bajo la curva de distribución de Gauss	169
<b>2</b>	<b>El principio de mínimos cuadrados</b>	<b>172</b>
A2-1	Mínimos cuadrados y medias de las muestras	172
A2-2	Ajuste de mínimos cuadrados a una línea recta	173
A2-3	Ponderación en los cálculos estadísticos	175
<b>3</b>	<b>Tablas de diferencias y cálculo de diferencias finitas</b>	<b>178</b>
A3-1	Fundamentos matemáticos	178
A3-2	Aplicación de las tablas de diferencias a los valores medidos	184
<b>4</b>	<b>Experimento de muestra</b>	<b>187</b>
A4-1	Diseño del experimento	187
A4-2	Informe	196
	<b>Bibliografía</b>	<b>200</b>
	<b>Respuestas a los problemas</b>	<b>202</b>
	<b>Índice</b>	<b>205</b>

# Prefacio

La primera edición del presente libro fue escrita para apoyar la sugerencia de que, independiente de los objetivos que se fijan para un curso superior introductorio de laboratorio de física, no deberían pasarse por alto los principios de experimentación básicos que, de hecho, podrían convertirse en el tema principal del mismo. Los cursos elementales de laboratorio de física son especialmente adecuados para este propósito, puesto que los sistemas y las teorías considerados en ellos por lo general son lo suficientemente sencillos para que las características básicas de la medición y la experimentación puedan, con facilidad, resultar evidentes y comprensibles. Tal enfoque en el trabajo del laboratorio de física puede, por tanto, beneficiar a una amplia gama de estudiantes y no sólo a aquellos que en el futuro proseguirán una carrera profesional en física.

Este propósito, en el que se basó la edición de 1962, al parecer sigue siendo válido. De entonces a la fecha ha habido muchos cambios en la práctica de la experimentación, en parte debido a la introducción de nuevos instrumentos, pero principalmente a causa del enorme impacto de la computación electrónica. No sólo podemos lograr ahora, con relativa facilidad, un rigor analítico de los datos posterior al experimento que hace veinticinco años hubiese sido absolutamente imposible, sino que las posibilidades de conducción de la experimentación misma han aumentado enormemente, gracias a la disponibilidad del análisis de información en base de datos o al control por computadora de los aparatos empleados.

No obstante lo revolucionario que estos cambios han resultado en la conducción real de los experimentos, ha habido, sin embargo, poca o ninguna mo-

dificación en los principios básicos que sustentan la experimentación, y aún es preciso entrenarse en tales principios. En realidad, hoy día quizá sea aún más necesario de lo que era hace veinticinco años hacer hincapié en estos principios, teniendo en cuenta la posibilidad actual de que el experimentador quede totalmente aislado del fenómeno que investiga por una barrera casi impenetrable de equipos de procesamiento de datos y de nuevos procedimientos de análisis. En estas nuevas circunstancias, fallas del todo inadvertidas pueden producir resultados finales de poco o ningún significado. A menos que tengamos una comprensión clara y completa de todas las fases de nuestro experimento y su análisis de datos, dejaremos, a nuestro riesgo, la conducción del proceso completamente en manos de la computadora.

El plan de este libro es, en su mayor parte, el mismo que en la edición anterior, aunque el texto ha sido reescrito casi por completo. El capítulo 1 ofrece un enfoque del trabajo en el laboratorio de física superior introductoria que facilita el encuentro con la naturaleza esencial de la experimentación científica. Los capítulos 2, 3 y 4 proporcionan la información básica sobre los procedimientos científicos, estadísticos y de medición en los que está fundado el diseño de experimentos. El capítulo 5 presenta paso a paso los requerimientos prácticos para diseñar un experimento, y el capítulo 6 describe los procedimientos correspondientes para la evaluación de los resultados experimentales una vez efectuadas las mediciones del caso. Al cabo del cuerpo principal del libro del capítulo 7 ofrece algunas sugerencias para redactar informes de laboratorio.

Los apéndices tratan temas que, si bien pertinentes por su contenido, de haberse incluido en el cuerpo principal del texto, hubiesen entorpecido el desarrollo natural de éste. Esto incluye la deducción matemática de algunas de las ecuaciones consideradas en el texto principal. Con todo detalle, además se presenta un experimento de muestra, empezando por el diseño del experimento en sí, describe la conducción real del mismo y la evaluación de sus resultados y concluye con el informe final.

Los contenidos temáticos aquí presentados han conformado, durante muchos años, el núcleo de enseñanza en nuestro laboratorio de física, para primer año en la universidad y estoy agradecido a las generaciones de estudiantes cuya experiencia no siempre grata con este material, nos ha dado la oportunidad de mejorarlo continuamente. Por último, quiero dar las gracias a Jill Hodgson y Rachel Desrosiers por su generosa e inapreciable ayuda en la preparación del manuscrito.

D. C. Baird

# Enfoque del trabajo de laboratorio

La finalidad primera de este libro es que se use en cursos superiores introductorios al laboratorio de física. Sin embargo, fue escrito con la esperanza de que sirva para un propósito mucho más amplio: el de proporcionar una introducción al estudio de la experimentación en general, independientemente del área en la que se realizan los experimentos. Algunos de los que estudian introducción al laboratorio de física podrán proseguir carreras con investigación en física, por lo que este libro puede servirles como una introducción adecuada para la continuación de sus estudios. Muchos otros seguirán carreras en áreas completamente diferentes, o quizá en otras ciencias. Cualquiera que sea su necesidad, el laboratorio de física puede proporcionarles una introducción útil a los principios fundamentales en que se basan los experimentos de cualquier tipo.

Para nuestros fines, la experimentación tiene una definición muy amplia: por experimentación entendemos el proceso completo de identificar una porción del mundo que nos rodea, obtener información de ella e interpretarla. Esta definición cubre una variedad muy grande de actividades: desde un biólogo con bata blanca que divide moléculas de ADN hasta un fabricante que hace una encuesta para determinar las preferencias individuales de crema dental. Se pretende que este libro satisfaga las necesidades de todos aquellos que se encuentran ocupados en cualquier clase de estudio sobre el mundo que nos rodea.

Eso incluye a los que no están realmente involucrados en la experimentación. Con frecuencia todos nos enfrentamos con el requisito de por lo menos

expresar un juicio sobre la información experimental que otros proporcionan, aun cuando no estemos conectados activamente con el proceso de generarla. Por ejemplo: nuestro trabajo profesional puede requerir que tomemos una decisión entre ofertas competitivas de equipos que cumplen con ciertas especificaciones o, como miembros del público en general, se nos puede pedir que tengamos una opinión sobre temas como los posibles riesgos para la salud que implican las plantas nucleoelectricas, cuán seguros son los aditivos en los alimentos, el impacto de la lluvia ácida sobre el medio ambiente o la influencia de las políticas monetarias nacionales sobre el desempleo. Lo que todos estos ejemplos tienen en común es el papel prominente que tiene en ellos la información experimental. Esos problemas públicos nos imponen la responsabilidad de tomar nuestras propias decisiones, y éstas deben basarse en nuestra evaluación de la confiabilidad de la información experimental. Aun en asuntos menos importantes oímos repetidamente afirmaciones como la de que las pruebas científicas han demostrado que podemos controlar la caries o los dolores de cabeza en un  $x\%$  utilizando ciertos productos. Nuestra elección de un nuevo automóvil puede depender de la evaluación que hagamos de la exactitud de los valores de consumo de combustible que se le atribuyen. Todos por igual, los científicos y los profanos, nos enfrentamos diariamente con el requisito de estar enterados con respecto a la naturaleza de la información experimental y las formas en que ésta se obtiene para poder ser adecuadamente escépticos con respecto a su confiabilidad.

Para regresar a nuestra afirmación de que un curso de laboratorio en física puede proporcionar una introducción al tema de la experimentación en general, es natural que nos preguntemos cómo puede usarse para ese propósito un laboratorio típico, con sus experimentos acostumbrados. La respuesta se encuentra no tanto en los experimentos mismos, como en la actitud con que los abordemos. Esto quedará claro conforme proceda nuestro estudio de los métodos experimentales, pero en este punto puede ser útil ilustrar la propuesta con unos cuantos ejemplos.

Para ofrecer dichos ejemplos debemos anticipar un poco el trabajo del capítulo 4, y hacer notar que veremos todo lo que sea susceptible de experimentación en términos de “sistemas”. Por un sistema entenderemos, en general, cualquier entidad definida y aislada que funciona de una manera específica. Suponemos que podemos influir o controlar el sistema, y nos referimos a los métodos que tenemos al alcance para hacerlo como las “entradas”. También suponemos que el sistema realizará alguna o algunas funciones identificables, y nos referiremos a ellas como las “salidas”. Los diversos ejemplos que siguen aclararán el uso de esa terminología. Por ejemplo, un economista puede ver la economía de un país como un sistema con un extenso conjunto de entradas y la correspondiente variedad de salidas. El sistema mismo incluirá la ca-

pacidad productiva total de bienes y servicios, medios de transporte, suministro de materias primas, habitantes, oportunidades para el comercio exterior, estado del tiempo y muchas otras cosas. Las entradas son aquellas cosas que podemos controlar: la oferta de dinero, las tasas de impuestos, el gasto público, los aranceles a las importaciones, etc. Las salidas son las cosas que no podemos controlar directamente; sus magnitudes las determina el sistema y no nosotros. Las salidas de un sistema económico incluirán el producto interno bruto, el índice de desempleo, el índice de inflación, la balanza de comercio exterior, etc. Sería muy reconfortante y conveniente si pudiéramos asegurar los valores deseados de esas salidas mediante una manipulación sencilla, pero no podemos hacerlo. No importa lo deseable que eso sea, no podemos ordenarle al producto interno bruto o al índice de desempleo de un país que tenga un cierto valor; estamos restringidos a controlar nuestras entradas, y aun así tenemos problemas. En un sistema tan complejo como una economía nacional, las conexiones entre las salidas y las entradas son intrincadas e indirectas. Un cambio en una variable de entrada es probable que tenga efecto en un gran número de variables de salida, en vez de la única salida en la que estamos interesados. Por ejemplo, un intento de aumentar el producto interno bruto de un país reduciendo las tasas impositivas es posible que tenga al menos un éxito parcial, pero el efecto simultáneo sobre otras salidas puede ser igualmente prominente y no tan deseable, como puede ser un posible incremento de la tasa de inflación. Los métodos de que disponemos para manejar tales situaciones son complicados, pero, con un sistema de tal complejidad, el grado de éxito alcanzado por los políticos y economistas demuestra que todavía hay lugar para hacer mejoras substanciales.

Existen otros sistemas que, aunque todavía son complejos, son lo bastante sencillos para que los podamos controlar con un éxito razonable. Consideremos, por ejemplo, un reactor nuclear. Aquí el sistema tiene un número menor de controles de entrada y de salidas, y la situación está definida con más claridad. Las entradas incluyen la posición de las barras de control, la cantidad y el tipo de combustible, la rapidez de flujo del refrigerante, etc. Las salidas incluyen cantidades como la densidad de flujo de neutrones, la potencia total producida, la vida útil de los elementos de combustible, etc. En este caso la conexión entre las entradas y las salidas es lo suficientemente sencilla (aunque todavía no es directamente de uno a uno) para que sea posible un nivel razonable de control. En otro nivel más familiar, todo supermercado es un sistema con entradas y salidas cuya manipulación constituye un experimento sobre el sistema. Cada vez que el gerente del supermercado altera el precio de las papas (una de sus entradas) de hecho está realizando un experimento, porque quiere detectar un cambio consecuente en una o más de sus salidas (por ejemplo, sus utilidades al final de la semana). Si no es capaz de percibir la alteración deseada en sus salidas, se le puede requerir que revise su decisión original, y de

nuevo altere el precio de las papas. En otras palabras, está ensayando continuamente las propiedades de su sistema por medio del experimento, y su habilidad para detectar los resultados experimentales puede hacer toda la diferencia entre pérdidas y ganancias.

De manera incidental, debemos hacer notar también que, en el ejemplo del gerente del supermercado, algunas de sus entradas y salidas tienen que ver con la gente (horarios de trabajo, salarios, moral, productividad, etc.); y en caso de que este uso del enfoque de sistemas en todos los problemas, tanto humanos como mecánicos, suene como un enfoque demasiado mecanicista de la vida, debemos hacer notar que mucho de nuestro trabajo subsecuente se ocupará de los límites en la validez de los métodos experimentales. Todos hemos escuchado la frase: “se ha demostrado científicamente” presentada como un argumento irrefutable, y debemos estar alertas a los peligros de una confianza equivocada en la infalibilidad científica.

Pero, volviendo a nuestros sistemas, ¿cómo se aplica todo esto al curso de laboratorio de física? De hecho, si vamos a preparar personas para que se incorporen a una población científicamente letrada, ¿no sería mejor atacar los problemas importantes de una buena vez, y empezar a decidir si el contenido de mercurio del pescado hace que no sea seguro comerlo? Sin embargo, lo malo es que estos son problemas en extremo difíciles. La evidencia no es fácil de obtener y su interpretación normalmente es incierta; hasta los mismos expertos están en desacuerdo, a veces en forma enérgica y pública. Es casi imposible hacer una contribución significativa a la solución de problemas tan complejos sin desarrollar primero nuestras habilidades utilizando situaciones más sencillas. Para iniciarnos en ello, vamos a pensar en algunos de estos sistemas más sencillos.

Un motor de gasolina es un sistema que es sencillo en comparación con cualquiera de los ejemplos anteriores. El sistema incluye el motor, el suministro de combustible, la estructura, la atmósfera circundante, etc. Las entradas pueden ser los controles obvios como el suministro de combustible, la relación combustible/aire, la sincronía del encendido, etc., y las salidas, como siempre, son los factores cuyo valor lo determina el sistema: el número de revoluciones por minuto, la cantidad de calor producido, la eficiencia, la composición de los gases de escape, etc. Este es todavía un sistema un tanto complejo, pero empezamos a ver que pueden existir relaciones relativamente simples entre las entradas y las salidas. Por ejemplo, la relación de entrada y salida entre la posición del acelerador y las revoluciones por minuto en un motor de gasolina es lo suficientemente directa y predecible para que la mayoría de las personas la observemos todos los días. Sin embargo, notemos que el efecto de esa entrada no está restringido a la única salida en la que estamos in-

teresados (revoluciones por minuto); otras salidas, como el calor producido, la composición de los gases de escape y la eficiencia, también son alteradas por esa entrada, aunque en general estemos predispuestos para ignorar ese acoplamiento.

En este ejemplo empezamos a llegar a la etapa en la que nuestro sistema es lo bastante sencillo para que comencemos a trabajar en la teoría de la experimentación. Avancemos un paso más y consideremos el ejemplo de un péndulo simple. Ese es también un sistema; sin embargo, es un sistema que incluye algunas cosas más que el hilo, la masa, el soporte y el aire que lo rodea. Más aún, sólo tiene dos entradas inmediatamente obvias: la longitud del hilo y las condiciones iniciales según las cuales empieza el movimiento. Las salidas son también reducidas en número. Aparte de pequeños efectos secundarios, incluyen sólo la frecuencia de oscilación y la amplitud de las oscilaciones. Por último, la conexión entre las entradas y las salidas es relativamente directa y reproducible. Alterar la longitud del hilo del péndulo nos dará pocas sorpresas cuando midamos la frecuencia de oscilación. Aquí, por lo tanto, tenemos un sistema en el que los principios de experimentación serán claramente visibles. Si lo usamos para desarrollar la capacidad de controlar sistemas y evaluar sus salidas, desarrollaremos la competencia necesaria para atacar luego problemas más importantes, pero también más complejos. Esto nos da la clave para por lo menos darle algún uso constructivo al curso de laboratorio de física. Hay una razón real para trabajar con un péndulo, pero sólo si lo visualizamos en forma adecuada. Si lo vemos sólo como el péndulo que todos hemos “hecho” antes, nuestra única reacción será de total aburrimiento. Sin embargo, si lo vemos como un sistema, igual que un supermercado, un aeropuerto, un reactor nuclear o la economía nacional, pero que difiere de ellos sólo en que es lo bastante sencillo para que lo podamos entender relativamente bien, proporcionará una excelente simulación de los problemas del mundo real.

He aquí la justificación para apoyarnos en este curso de laboratorio de física para enseñar experimentación. Los sistemas que incluye son lo bastante sencillos para que estén cerca de ser comprensibles, y la práctica con ellos nos preparará para proseguir más adelante con nuestro trabajo real en sistemas importantes y complicados. Sin embargo, debemos tener cuidado con la manera en que practiquemos con estos sistemas sencillos. Obtendremos sólo un beneficio muy limitado si nos restringimos a conjuntos de instrucciones que nos dicen cómo hacer experimentos particulares. Si es nuestra intención proporcionar una base para proceder a *cualquier* tipo de análisis de información en la ciencia, la tecnología, los negocios o cualquiera de las ciencias sociales, tendremos que dar una preparación para una gran variedad de circunstancias experimentales. En algunas áreas dominan las fluctuaciones al azar, como en las ciencias biológicas; en otras, como la astronomía, las mediciones deben de ser

precisas, pero el control sobre la materia del experimento es limitado. El alcance es enorme. Como dijimos antes, trataremos de identificar los principios generales de la experimentación, con la esperanza de que sean válidos y útiles, sin importar el objeto futuro o el tipo de la experimentación. El resto de este libro se ocupará de esos principios, y supondremos de aquí en adelante que los experimentos de laboratorio se considerarán como ejercicios para ilustrar esos principios.

Puede ser obvio ahora que muchos de los procedimientos tradicionales en los primeros cursos de laboratorio sean inadecuados para nuestros propósitos. Por ejemplo, evitamos pensar en un experimento como un procedimiento para reproducir cierto resultado “correcto”, cualquier desviación del cual hace que estemos “equivocados”. En lugar de eso, simplemente evaluamos de manera imparcial las propiedades de nuestro sistema en particular y tomamos los resultados como vengan. Además, no tiene caso buscar algún “procedimiento” a seguir: eso no es más que pedirle a alguien que nos diga cómo hacer el experimento. En la vida real rara vez hay alguien dispuesto a decirnos qué hacer o cuál debe de ser nuestro resultado; nuestra utilidad dependerá de la capacidad para tomar nuestras *propias* decisiones sobre cómo manejar la situación. Toma gran cantidad de práctica y experiencia desarrollar la confianza en nuestras propias decisiones sobre la conducción de cualquier procedimiento experimental, y este curso de laboratorio de física no es demasiado pronto para empezar. Pondremos, por lo tanto, mucho énfasis en la planeación del experimento, porque ésta es la etapa en la cual se necesita mucha de la habilidad para experimentar. Es importante evitar la tentación de considerar la planeación preliminar como una pérdida de tiempo o una distracción de la tarea que se supone más importante de hacer las mediciones. Se debe contar con tiempo reservado explícitamente para un análisis y una planeación adecuada del experimento antes de que se inicie el verdadero proceso de medición.

Además, es necesario que aprendamos a trabajar dentro del marco de los aparatos disponibles. Toda experimentación profesional está sujeta a limitaciones sobre los recursos, y gran parte de la habilidad para la experimentación consiste en optimizar el rendimiento experimental a partir de esos recursos. Además, las restricciones en el tiempo simplemente simulan las circunstancias en las que se hace la mayor parte de la experimentación real. El aparato mismo nunca será ideal. Sin embargo, esto no debe verse como un defecto sino como un reto. El verdadero trabajo de evaluar resultados experimentales consiste en separar el grano de los resultados útiles de la paja de los errores y la incertidumbre. El experimentador debe aprender a identificar las fuentes de error por sí mismo y, de ser posible, eliminarlas o hacer las correcciones que requieran. Sin embargo, aun con el mayor cuidado, siempre habrá un residuo irreducible de incertidumbre, y es responsabilidad del experimentador evaluar la precisión del

resultado final, cantidad que es tan importante como el resultado mismo. La capacidad de cumplir tales requisitos se puede adquirir solamente por el verdadero contacto con unas condiciones de trabajo realistas, y es una injusticia común que se comete con los estudiantes de los primeros cursos de laboratorio de física, proporcionarles aparatos que están ajustados con demasiado cuidado, o darles, en otras formas, la impresión de que los experimentos son ideales. Eso es lamentable, porque los fundamentos de la futura destreza están en la respuesta constructiva a las limitaciones experimentales.

En resumen, el uso del tiempo de laboratorio resultará más fructífero cuando los experimentos se acepten como problemas que deben resolverse por el estudiante mismo. Ciertamente se cometerán errores de juicio, pero podemos aprender de manera más eficiente de la experiencia personal con las consecuencias de nuestras decisiones, que de seguir rígidamente algún procedimiento “correcto” establecido. Lo que aprendemos es más importante que lo que hacemos. Esto no quiere decir, sin embargo, que debemos mostrar indiferencia complaciente con el resultado del experimento. El desarrollo de nuestras habilidades experimentales sólo se logrará si tomamos en serio el reto de obtener el mejor resultado posible de cada experimento.

La redacción de los informes de laboratorio debe enfrentarse con el mismo espíritu constructivo. En la vida profesional tiene muy poco caso dedicar tiempo y esfuerzo a un experimento a menos que podamos comunicar en forma conveniente el resultado a los demás. Tenemos la obligación con nuestros lectores de expresarnos de manera clara, si no elegante, si con claridad. Es incorrecto considerar que ésa es la responsabilidad de los expertos de la facultad de letras, y redactar informes en un laboratorio científico elemental debe de aceptarse como una oportunidad de ejercitarse en la composición descriptiva. La elaboración de un informe que degenera en una mera indicación de que el experimento se realizó es poco menos que una pérdida de tiempo y de oportunidades para una práctica necesaria. La redacción de informes al nivel que se sugiere aquí es casi inútil sin una crítica y una revisión adecuadas. Las oportunidades de mejorarla se hacen mucho más obvias en retrospectiva, y esa revisión detallada debe considerarse como una parte indispensable del trabajo en un laboratorio de docencia.

# 2

## Medición e incertidumbre

### 2—1 NATURALEZA BASICA DEL PROCESO DE MEDICION

La medición es el proceso de cuantificar nuestra experiencia del mundo exterior. El científico escocés del siglo XIX, Lord Kelvin, dijo alguna vez: “Cuando uno puede medir aquello de lo que está hablando y expresarlo en números, sabe algo acerca de ello; pero cuando no puede medirlo, cuando no puede expresarlo en números, su conocimiento es escaso e insatisfactorio: podrá ser un principio de conocimiento, pero escasamente ha avanzado su conocimiento a la etapa de una ciencia”. Aunque ésta pueda parecer una afirmación un poco exagerada, sigue siendo cierto que las mediciones constituyen uno de los ingredientes básicos de la experimentación. No alcanzaremos un nivel satisfactorio de competencia en la experimentación sin un conocimiento de la naturaleza de la medición y lo que significa el enunciado de las mediciones.

Es obvio que el proceso de cuantificación casi invariablemente trae consigo la comparación con alguna cantidad de referencia (¿cuántos pasos mide de largo el patio?). De igual manera, es obvio que el buen orden en la sociedad requiere de un acuerdo extendido sobre la elección de cantidades de referencia. El problema de esos patrones de medición, definidos por la legislación y sujetos a convenciones internacionales, es amplio e importante. Nadie que esté interesado seriamente en la medición puede ignorar el problema de definir y realizar patrones en su área de trabajo. Sin embargo, exponer aquí ese importante tema nos distraería de nuestra preocupación principal, que es el proceso de medición. Por lo tan-

to, dejaremos el tema de los patrones sin ninguna otra mención posterior, excepto para hacer referencia a los textos que se indican en la bibliografía, y abordaremos el estudio del proceso mismo de medición.

Empecemos en el nivel más básico con una medición aparentemente sencilla: tratemos de averiguar de qué tipo de proceso se trata y qué tipo de afirmación se puede hacer. Si le doy a alguien el cuaderno en el que escribo esto y le pido que mida su longitud con una regla, la respuesta es invariable: la longitud del cuaderno es de 29.5 cm. Pero esa respuesta nos debe hacer pensar; ¿en realidad se nos pide que creamos que la longitud del cuaderno es de exactamente 29.5000000 . . . . . cm? Seguro que no; es claro que esa afirmación está fuera de los límites de la credibilidad. Entonces, ¿cómo vamos a interpretar el resultado? Un momento de reflexión en presencia del cuaderno y de una regla nos hará darnos cuenta de que, lejos de determinar el valor “correcto” o “exacto”, lo único que podemos hacer en forma realista es acercarnos al borde del cuaderno sobre la escala, diciéndonos conforme avanzamos: “¿Puedo asegurar que el resultado es menos de 30 cm?, ¿menos de 29.9 cm?, ¿menos de 29.8 cm?”. La respuesta a cada una de estas preguntas indudablemente será “Sí”. Pero conforme avancemos sobre la escala, llegaremos a un punto en el cual ya no podremos dar con confianza la misma respuesta. En ese punto debemos detenernos, y de ese modo identificamos un extremo del intervalo que se convertirá en nuestro valor medido. De manera semejante podríamos acercarnos al borde del cuaderno por abajo, preguntándonos a cada paso: “¿Estoy seguro de que el resultado es mayor de 29.0 cm? ¿29.1 cm?”, y así sucesivamente. Una vez más debemos de llegar a un valor en el cual nos tendremos que detener, porque ya no podremos decir con seguridad que el resultado es mayor. Mediante la combinación de esos dos procesos identificamos un intervalo sobre la escala. Ese es el intervalo más pequeño que, hasta donde podemos estar seguros, contiene el valor deseado; sin embargo, no sabemos en qué punto del intervalo está ese valor. Esta es la única consecuencia realista del proceso de medición. No podemos esperar resultados exactos y tendremos que contentarnos con medidas que toman la forma de intervalos. Este ejemplo no sólo ilustra la naturaleza esencial del proceso de medición sino que también nos proporciona una guía para hacer las mediciones mismas. El proceso de aproximarse al valor que buscamos acotándolo por ambos lados nos recuerda la necesidad de dar el resultado como un intervalo, y también hace más fácil identificar los extremos del mismo.

Lo que resulta al final de nuestra discusión es muy importante. Cuando hagamos mediciones e informemos de sus resultados debemos tener siempre en cuenta este punto clave y fundamental: las medidas no son simples números exactos, sino que consisten en intervalos, dentro de los cuales tenemos confianza de que se encuentra el valor esperado. El acto de la medición requiere

que determinemos tanto la localización como el ancho de ese intervalo, y lo hacemos utilizando con cuidado la percepción visual cada vez que hacemos una medición. No existen reglas para determinar el tamaño del intervalo, porque dependerá de muchos factores del proceso de medición. El tipo de medición, la figura de la escala, nuestra agudeza visual, las condiciones de iluminación, todas tomarán parte en determinar la anchura del intervalo de medición. El ancho, por lo tanto, debe determinarse explícitamente cada vez que se haga una medición. Por ejemplo, es un error común creer que, cuando se hace una medición usando una escala graduada, el “error de lectura” es automáticamente la mitad de la división de la escala más pequeña. Esta es una simplificación excesiva y errónea de la situación. Una escala con divisiones muy finas que se use para medir un objeto con bordes mal definidos puede dar un intervalo de medición más grande que varias de las divisiones más pequeñas; por otra parte, un objeto bien definido con buenas condiciones visuales puede permitir la identificación de un intervalo de medición mucho menor que la división más pequeña de la escala. Cada situación debe evaluarse en forma individual.

## 2—2 PRESENTACION DIGITAL Y REDONDEO

Hay otros aspectos que también pueden confundir el problema. Considere, por ejemplo, un instrumento que da una lectura digital. Si un voltímetro digital indica que cierta diferencia de potencial es de 15.4 V, ¿quiere eso decir que el valor es exactamente de 15.40000. . .? Por supuesto que no, pero, ¿qué significa? Eso depende de las circunstancias. Si el instrumento se fabrica de manera que lea 15.4 V porque el valor real es más cercano a 15.4 de lo que es 15.3 o 15.5, entonces lo que significa es: esta lectura está entre 15.35 y 15.45. Por otra parte, se puede hacer un reloj digital de manera que cambie su indicación de 09.00 a 09.01 exactamente a las 9.01. Entonces, si vemos que marca las 09.00, sabemos que la hora está entre las 9.00 y las 9.01; ésta es una interpretación un poco diferente de la que es adecuada para el voltímetro digital. De nuevo, cada situación debe juzgarse por sí misma.

Estos dos ejemplos de representación digital ilustran un concepto más general: la inexactitud inherente al proceso de “redondear”. Aun cuando no surja una inexactitud de la capacidad limitada para hacer mediciones, el simple enunciado de una cantidad numérica puede contener inexactitudes. Consideremos la afirmación:

$$\pi = 3.14$$

Todos sabemos que no es así, porque podemos recordar, al menos, algunas de las cifras siguientes: 3.14159. . . ; entonces, ¿qué queremos decir cuando cita-

mos  $\pi$  como 3.14? Sólo puede significar que  $\pi$  tiene un valor más cercano a 3.14 de lo que es a 3.13 o 3.15. Por lo tanto, nuestra afirmación es que  $\pi$  está entre 3.135 y 3.145. Este margen de posibilidad representa lo que algunas veces se conoce como “el error de redondeo”. Esos errores pueden ser pequeños e irrelevantes, o pueden volverse significativos. Por ejemplo, en un cálculo largo, hay la posibilidad de que los errores de redondeo se acumulen, y resulta más sensato, especialmente en esta época de gran disponibilidad de calculadoras, llevar el cálculo con más cifras de las que se podría pensar que son necesarias. Un error semejante de redondeo puede aparecer en enunciados sobre mediciones. Algunas veces oímos decir que alguien ha realizado una medición en una escala que “se aproximó al milímetro”, o alguna otra frase parecida. Esa no es una manera correcta de citar una medida, ya que hace confuso el valor real del intervalo de la misma. Sin embargo, nos encontramos con tales afirmaciones y, si nos vemos obligados a tratar con medidas representadas en esa forma, sólo podemos suponer que la división de la escala que se cita representa algún tipo de valor mínimo del tamaño del intervalo de medición.

## 2—3 INCERTIDUMBRE ABSOLUTA Y RELATIVA

Cualquiera que sea el medio por el que hayamos hecho una medición, el resultado final deberá ser un intervalo que representa, hasta donde nuestra capacidad lo garantice, los límites dentro de los que se encuentra el valor deseado. En el ejemplo que usamos al principio, el experimentador únicamente puede ser capaz de afirmar con seguridad que la longitud del cuaderno está entre 29.4 y 29.6 cm. Aunque el único resultado significativo de un proceso de medición consiste en un intervalo o segmento como éste, con frecuencia es deseable, para propósitos de descripción o de cálculo posterior, enunciar de otra forma el valor citado. Tomamos el intervalo de 29.4 a 29.6 y lo *renombramos*  $29.5 \pm 0.1$  cm. Aunque obviamente no es más que una expresión del intervalo original con el nombre cambiado, esa nueva forma tiene ciertas ventajas. Nos da un valor central, de 29.5, que podemos utilizar en cálculos posteriores. También nos da otro valor,  $\pm 0.1$ , que se conoce como “la incertidumbre” de la medida, con el que podemos juzgar la calidad del proceso de medición y puede usarse en cálculos separados de incertidumbres. Una desventaja de esta forma de expresarlo es que se podría citar únicamente el valor central de 29.5. A menos que recordemos claramente que sólo la cantidad completa ( $29.5 \pm 0.1$ ) sirve como una expresión correcta del resultado, y podemos ser desordenados al hacer mediciones o reportes sobre ellas, olvidando la presencia esencial de la incertidumbre. Todos deberíamos convertir en una práctica invariable asociar un valor de incertidumbre con una lectura, tanto al momento de hacer la medición como después de este proceso, siempre que se cite su valor o se utilice para cálculos posteriores.

Como la cifra de  $\pm 0.1$  cm representa la magnitud o el intervalo en que la lectura de 29.5 es incierta, a menudo se le llama la “incertidumbre absoluta” de la medida, y usaremos con consistencia esta terminología. Además, otros aspectos pronto se vuelven importantes. ¿Cuán significativa es una incertidumbre de  $\pm 0.1$  cm? Cuando medimos la longitud de un cuaderño, es significativa hasta cierto punto. Si estamos midiendo la distancia entre dos ciudades, una incertidumbre de  $\pm 0.1$  cm es probable que sea completamente insignificante. Por otra parte, si estamos midiendo el tamaño de una bacteria microscópica, una incertidumbre de  $\pm 0.1$  cm haría que la medición careciera de sentido. Por esta razón, con frecuencia es deseable comparar la cifra de incertidumbre con el valor de la medición misma; haciéndolo así se puede evaluar en forma realista cuán significativa es la incertidumbre. Definimos la razón:

$$\text{incertidumbre relativa} = \frac{\text{incertidumbre absoluta}}{\text{valor medido}}$$

En el caso de nuestro ejemplo:

$$\text{incertidumbre relativa} = \pm \frac{0.1}{29.5} = \pm 0.003$$

Esta incertidumbre relativa con frecuencia se cita como un porcentaje, de modo que, en este caso, la incertidumbre relativa sería de  $\pm 0.3\%$ . Esa cantidad nos da un sentido mucho mejor de la calidad de la lectura, y a menudo la llamamos la “precisión” de la medida. Nótese que la incertidumbre absoluta tiene las mismas dimensiones y unidades que la medida básica (29.5 cm es incierto en 0.1 cm), en tanto que la incertidumbre relativa, por ser un cociente, no tiene dimensiones o unidades, y es un número puro.

## 2—4 ERROR SISTEMÁTICO

El tipo de incertidumbre que hemos considerado surge de una insuficiencia que ocurre naturalmente en el proceso de medición. Hay un tipo de error diferente que puede aparecer cuando algo afecta todas las lecturas de una serie en forma igual o consistente. Por ejemplo, un voltímetro o un tornillo micrométrico pueden tener mal ajuste del cero, una regla de madera puede haberse encogido, una persona puede apretar sistemáticamente el botón de un cronómetro  $\frac{1}{10}$  de segundo después del suceso, y así por el estilo. Esos errores se llaman “errores sistemáticos”, de los cuales una subclase es la de los “errores de calibración”.

Como esos errores sistemáticos no son visibles de inmediato cuando se hace una medición, es necesario estar alerta y recordar en todo momento la posibilidad de que se presenten. Por ejemplo, los ceros de las escalas deben verificarse automáticamente cada vez que se use un instrumento. Aunque puede ser más difícil verificar su calibración, la exactitud de los medidores eléctricos, cronómetros, termómetros y otros instrumentos no debe darse por buena y debe verificarse siempre que sea posible. La presencia de una pantalla de lectura digital con visibilidad precisa, con cuatro o cinco cifras supuestamente significativas, tampoco debe tomarse como prueba de precisión y ausencia de error sistemático en un instrumento. La mayor parte de un lote de cronómetros electrónicos que adquirimos en nuestro laboratorio para usarlos en la docencia, que supuestamente podían medir intervalos de tiempo con precisión de milisegundos, resultó tener errores de calibración hasta de un 14%. No se deje engañar; vea todos los instrumentos de medición con desconfianza y verifique su calibración siempre que sea posible.

## 2—5 INCERTIDUMBRE EN CANTIDADES CALCULADAS

En las secciones anteriores nos hemos ocupado sólo del concepto de incertidumbre de una sola medida. Sin embargo, es raro que el proceso se termine con una sola medición. Casi invariablemente el resultado que deseamos es una combinación de dos o más cantidades medidas, o es, por lo menos, una función calculada a partir de una sola medida. Podemos intentar, por ejemplo, calcular el área transversal de un cilindro a partir de la medida de su diámetro, o su volumen a partir de medidas tanto del diámetro como de la altura. Las diferentes mediciones serán a veces de diferentes tipos, como en el cálculo de  $g$  a partir de los valores de la longitud y el periodo de un péndulo. En esos casos, es obvio que la presencia de incertidumbre en las medidas originales traerá consigo la presencia de una incertidumbre en el valor final calculado, que es la que ahora tratamos de encontrar. Para los propósitos de esta sección, supondremos que nuestras incertidumbres tienen el carácter de alcances o intervalos dentro de los que estamos “casi seguros” que se encuentra el valor correcto. Para los valores, calculados, encontraremos intervalos dentro de los que, de nuevo, podamos estar “casi seguros” que ahí están los valores buscados. Eso significa que tenemos que hacer nuestros cálculos para el “peor caso” de combinación de incertidumbres. Esta tal vez sea una suposición pesimista, pero veremos más adelante, en el capítulo 3, cómo las probabilidades asociadas con varias combinaciones de errores nos permiten hacer una estimación más realista y menos pesimista. Sin embargo, por el momento vamos a suponer que queremos calcular, a partir de las incertidumbres de los valores originales, el máximo margen de posibilidad para el valor calculado.

## 2-6 INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

Consideremos una cantidad medida  $x_0$  con una incertidumbre  $\pm \delta x$ , y consideremos un valor calculado  $z$  que es una función de la variable  $x$ . Sea:

$$z = f(x)$$

Esta función nos permite calcular el valor requerido  $z_0$  a partir de un valor medido  $x_0$ . Más aún, la posibilidad de que  $x$  pueda variar de  $x_0 - \delta x$  a  $x_0 + \delta x$ , implica un intervalo de posibles valores de  $z$  de  $z_0 - \delta z$  a  $z_0 + \delta z$ . Ahora queremos calcular el valor de  $\delta z$ . Esa situación se ilustra gráficamente en la figura 2-1, en la cual, para una  $f(x)$  dada, podemos ver cómo el valor medido  $x_0$  da lugar al valor calculado  $z_0$ , y cómo el intervalo  $\pm \delta x$  alrededor de  $x_0$  produce un intervalo correspondiente  $\pm \delta z$  alrededor de  $z_0$ .

Antes de considerar los métodos generales de evaluar  $\delta z$ , es instructivo ver cómo se propagan las perturbaciones finitas en funciones sencillas. Consideremos, por ejemplo, la función:

$$z = x^2$$

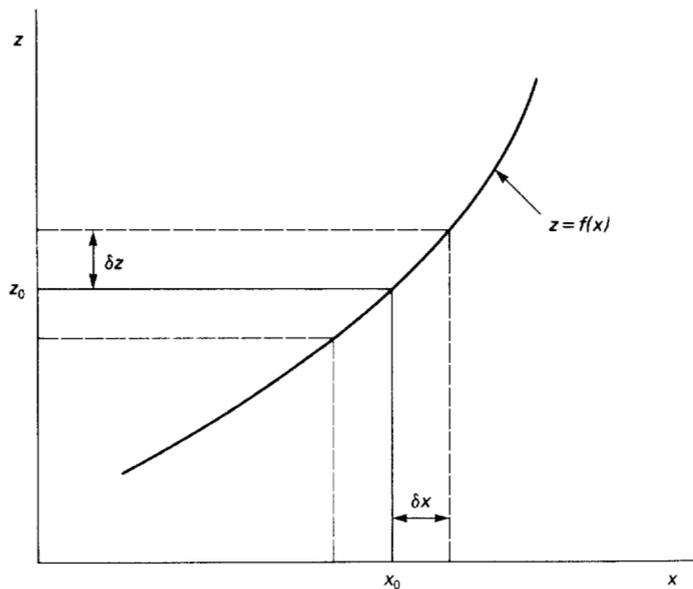


Figura 2-1 Propagación de incertidumbre de una variable a otra.

Si  $x$  puede variar entre  $x_0 - \delta x$  y  $x_0 + \delta x$ , entonces  $z$  puede variar entre  $z_0 - \delta z$  y  $z_0 + \delta z$ , donde:

$$\begin{aligned} z_0 \pm \delta z &= (x_0 \pm \delta x)^2 \\ &= x_0^2 \pm 2x_0\delta x + (\delta x)^2 \end{aligned}$$

Podemos ignorar  $(\delta x)^2$ , ya que  $\delta x$  se supone que es pequeña comparada con  $x_0$ , e igualar  $z_0$  con  $x_0^2$ , lo que da para el valor de  $\delta z$ :

$$\delta z = 2x_0\delta x$$

Esto puede expresarse más convenientemente en términos de la incertidumbre relativa  $\delta z/z_0$ :

$$\frac{\delta z}{z_0} = \frac{2x_0\delta x}{x_0^2} = 2\frac{\delta x}{x_0}$$

Así pues, la incertidumbre relativa del valor calculado es dos veces la de la medición inicial.

Aunque es esencial tener en mente la naturaleza de la incertidumbre propagada, como lo ilustra el uso de diferencias finitas, puede lograrse una simplificación considerable de la formulación lograda usando cálculo diferencial.

## 2—7 METODO GENERAL PARA LA INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

De la sección anterior, las diferencias finitas  $\delta z$  y  $\delta x$  se pueden expresar en términos de la derivada  $dz/dx$ . Por lo tanto, podemos obtener el valor de  $\delta z$  usando primero las técnicas normales para obtener  $dz/dx$  en la siguiente forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d(f(x))}{dx}$$

y escribiendo después:

$$\delta z = \frac{d(f(x))}{dx} \delta x \quad (2-1)$$

Este es un procedimiento relativamente simple, y funcionará bien en los casos para los cuales el planteamiento de diferencias finitas llevaría a una excesiva complejidad algebraica. Así, por ejemplo, si

$$z = \frac{x}{(x^2 + 1)}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}\end{aligned}$$

y finalmente:

$$\delta z = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \delta x$$

Este cálculo habría sido muy complicado con cualquier otro planteamiento. Más aún, nos da una expresión general para  $\delta z$  en función de  $x$  y  $\delta x$ ; cualquier valor deseado en particular puede obtenerse haciendo  $x = x_0$ . Usemos ahora estas técnicas para evaluar incertidumbres de algunas funciones comunes.

#### a) Potencias

Consideremos:

$$\begin{aligned}z &= x^n \\ \frac{dz}{dx} &= nx^{n-1} \\ \delta z &= nx^{n-1} \delta x\end{aligned}$$

Lo significativo de este resultado se hace un poco más obvio cuando se expresa en términos de la incertidumbre relativa. Así,

$$\frac{\delta z}{z} = n \frac{\delta x}{x}$$

Por lo tanto, cuando se evalúan potencias, la *incertidumbre relativa* del resultado es la incertidumbre relativa de la cantidad original multiplicada por la potencia respectiva. Esto será válido tanto para potencias como para raíces, de modo que la precisión disminuye si una cantidad se eleva a potencias y mejora al sacar raíces. Esta situación debe vigilarse con cuidado en un experimento que implique potencias. Cuanto más alta es la potencia, mayor será la necesidad de una alta precisión inicial.

#### b) Funciones trigonométricas

Sólo trabajaremos un ejemplo, ya que los demás se pueden tratar de manera semejante. Consideremos

$$z = \text{sen } x$$

Aquí se cumple

$$\frac{dz}{dx} = \cos x$$

y

$$\delta z = (\cos x) \delta x$$

Este es un caso en el que el método elemental de insertar  $x_0 \pm \delta x$  muestra más claramente el resultado. Utilizando la aproximación

$$\cos \delta x = 1$$

obtenemos

$$\delta x = \cos x \text{ sen } \delta x$$

lo que muestra que la  $\delta x$  en el resultado anterior es en realidad  $\text{sen } \delta x$  en el límite, para ángulos pequeños. Sólo en el caso de una incertidumbre muy grande podrá ser significativa esta diferencia, pero es mejor entender la naturaleza del resultado. Es claro que  $\delta x$  deberá expresarse en radianes. Este resultado normalmente tendrá una aplicación directa cuando se trate de aparatos como los espectrómetros.

### c) Funciones logarítmicas y exponenciales

Consideremos:

$$z = \log x$$

Aquí,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

y

$$\delta z = \frac{1}{x} \delta x$$

La incertidumbre relativa se puede calcular como de costumbre. Si

$$z = e^x$$

$$\frac{dz}{dx} = e^x$$

y entonces:

$$\delta z = e^x \delta x$$

Este es un caso importante, ya que las funciones exponenciales ocurren frecuentemente en la ciencia y la ingeniería. Estas funciones pueden hacerse muy sensibles al exponente cuando toma valores mucho mayores que la unidad, y la incertidumbre  $\delta z$  puede volverse muy grande. Esto le parecerá familiar, por ejemplo, a cualquiera que haya observado las fluctuaciones de corriente en un diodo termoiónico que resultan de variaciones muy pequeñas en la temperatura del filamento.

Como se dijo antes, este método puede aplicarse fácilmente a cualquier función no enumerada arriba evaluando la derivada respectiva y usando la ecuación 2-1.

## 2-8 INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

Si el resultado se debe calcular a partir de dos o más valores medidos,  $x$ ,  $y$ , etc., la incertidumbre de ese resultado puede verse de dos maneras diferentes, como se mencionó en la sección 2-5. Podemos ser tan pesimistas como sea posible y suponer que las desviaciones reales de  $x$  y  $y$  ocurren combinándose de manera tal que desvíen el valor de  $z$  tan lejos como sea posible de su valor central. De esta manera, calcularíamos un valor de  $\delta z$  que da la anchura extrema del intervalo de posibles valores de  $z$ . Por otra parte, podemos argumentar que es más probable que se combinen las incertidumbres de las medidas básicas de una manera menos extrema, donde algunas harán contribuciones positivas a  $\delta z$  y otras contribuciones negativas, de modo que el valor resultante de  $\delta z$  será menor que el que da la suposición pesimista. Este argumento es válido, y más adelante nos ocuparemos del problema de la incertidumbre probable de cantidades calculadas. Sin embargo, por el momento vamos a calcular el valor de  $\delta z$  que representa el más amplio margen de posibilidad para  $z$ . Este enfoque, si bien es pesimista, ciertamente es seguro, ya que, si  $\delta x$ ,  $\delta y$ , etc., representan límites dentro de los cuales estamos “casi seguros” que se encuentran los valores actuales, entonces el valor calculado de  $\delta z$  dará los límites dentro de los cuales también estamos seguros que se encuentra el valor actual de  $z$ .

El enfoque inicial más instructivo usa el método elemental de sustitución, y ése es el que usaremos para las primeras dos funciones.

a) Suma de dos o más variables

Consideremos:

$$z = x + y$$

La incertidumbre en  $z$  se obtiene a partir de:

$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y)$$

y el valor máximo de  $\delta z$  se obtiene escogiendo signos semejantes todo el tiempo. Así pues:

$$\delta z = \delta x + \delta y$$

Como era de esperarse, la incertidumbre en la suma es solamente la suma de las incertidumbres individuales. Podemos expresarla en términos de la incertidumbre relativa:

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x + \delta y}{x + y}$$

pero no se logra una mayor claridad.

#### b) Diferencia de dos variables

Consideremos:

$$z = x - y$$

Como en el caso anterior, se obtendrá  $\delta z$  a partir de:

$$z_0 \pm \delta z = (x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y)$$

Pero aquí podemos obtener el valor máximo de  $\delta z$  escogiendo el signo *negativo* para  $\delta y$ , lo que da, una vez más:

$$\delta z = \delta x + \delta y$$

Podemos ver en esta ecuación que, cuando  $x_0$  y  $y_0$  son muy cercanas y  $x - y$  es pequeña, la incertidumbre relativa puede adquirir valores muy grandes. Esto es, en el mejor caso, una situación insatisfactoria, y la precisión puede ser tan baja que anule el valor de la medición. Esa condición es en particular peligrosa, ya que puede pasar inadvertida. Es perfectamente obvio que, si fuera posible evitarlo, nadie intentaría medir la longitud de mi cuaderno midiendo la distancia de cada borde a un punto alejado un kilómetro para luego restar las dos longitudes. Sin embargo, puede suceder que el resultado deseado se obtenga por sustracción de dos medidas hechas por separado (en dos termómetros, dos relojes, etc.), y el carácter de la medición como diferencia puede no ser claro. En consecuencia, todas las mediciones que tengan que ver con diferencias deberán de tratarse con el mayor cuidado. Es claro que la forma de evitar esa dificultad es medir la diferencia de manera directa, en vez de obtenerla por sustracción de dos cantidades medidas. Por ejemplo: si uno tiene un aparato en el que dos puntos están a potenciales respecto a tierra de  $V_1 = 1500$  V y  $V_2 =$

1510 V, respectivamente, y la cantidad que se requiere es  $V_2 - V_1$ , sólo un voltímetro de muy alta calidad permitiría medir los valores de  $V_2$  y  $V_1$  con la exactitud requerida para lograr incluso un 10% de precisión en  $V_2 - V_1$ . Por otro lado, un voltímetro de banco ordinario de 10 V, conectado entre los dos puntos para medir  $V_2 - V_1$  directamente, daría de inmediato el resultado deseado, con un 2 o 3% de precisión.

## 2-9 METODO GENERAL PARA LA INCERTIDUMBRE EN FUNCIONES DE DOS O MAS VARIABLES

Los últimos dos ejemplos, tratados por el método elemental, sugieren que, una vez más, el cálculo diferencial puede ofrecer una simplificación considerable a este tratamiento. Es claro que, si tenemos:

$$z = f(x, y)$$

la cantidad apropiada para calcular  $\delta z$  es la diferencial total  $dz$ , que está dada por:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (2-2)$$

Tomaremos esta diferencial y la trataremos como una diferencia finita  $\delta z$  que se puede calcular a partir de las incertidumbres  $\delta x$  y  $\delta y$ . Esto es:

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$$

y las derivadas  $\partial f/\partial x$  y  $\partial f/\partial y$  normalmente se calcularán con los valores  $x_0$  y  $y_0$ , para los que se necesita  $\delta z$ . Podemos encontrar que, dependiendo de la función  $f$ , el signo de  $\partial f/\partial x$  o  $\partial f/\partial y$  resulte ser negativo. En ese caso, utilizando nuestro requisito pesimista para el valor máximo de  $\delta z$ , escogeremos los valores negativos apropiados para  $\delta x$  o  $\delta y$ , obteniendo de ahí una contribución total positiva a la suma.

### a) Producto de dos o más variables

Supongamos que:

$$z = xy$$

Para usar la ecuación 2-2 necesitamos los valores de  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$ . Estos son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

Por lo que el valor de  $\delta z$  está dado por:

$$\delta z = y \delta x + x \delta y$$

La significación de este resultado se ve con más claridad cuando se convierte a la incertidumbre relativa:

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

Así pues, cuando la cantidad deseada es el producto de dos variables, la incertidumbre relativa es la suma de las incertidumbres relativas de las componentes.

El caso más general de una función compuesta, que se encuentra muy comúnmente en la física, implica un producto algebraico que tiene componentes elevadas a diferentes potencias.

Sea

$$z = x^a y^b$$

en donde  $a$  y  $b$  pueden ser positivas o negativas, enteras o fraccionarias. En ese caso la formulación se simplifica de manera significativa tomando los logaritmos de ambos lados antes de diferenciar. Así:

$$\log z = a \log x + b \log y$$

de donde, diferenciando implícitamente, se obtiene:

$$\frac{dz}{z} = a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y}$$

Como de costumbre, tomamos las diferenciales como diferencias finitas, y obtenemos:

$$\frac{\delta z}{z} = a \frac{\delta x}{x} + b \frac{\delta y}{y}$$

Nótese que este proceso da la incertidumbre relativa de manera directa, y eso con frecuencia es conveniente. Si se requiere la incertidumbre absoluta  $\delta z$ , se puede evaluar simplemente multiplicando la incertidumbre relativa por el valor calculado  $z_0$ , que normalmente está disponible. Esta forma de diferenciación implícita sigue siendo el procedimiento más sencillo, aun cuando la misma  $z$  esté elevada a alguna potencia. Porque, si la ecuación es:

$$z^2 = xy$$

es innecesario reescribirla como:

$$z = x^{1/2} y^{1/2}$$

y partir de ahí, porque, si sacamos logaritmos:

$$2 \log z = \log x + \log y$$

de donde:

$$2 \frac{\delta z}{z} = \frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$$

lo que da  $\delta z/z$ , como se requería.

#### b) Cocientes

Estos se pueden tratar como productos, en los cuales algunas de las potencias son negativas. Como antes, el valor máximo de  $\delta z$  se obtendrá despreciando los signos negativos de la diferencial y combinando todos los términos en forma aditiva.

Si se encuentra una función distinta a las ya enumeradas, funciona por lo general alguna forma de diferenciación. Con frecuencia es conveniente diferenciar una ecuación en forma implícita, evitando así el requisito de calcular explícitamente la cantidad desconocida en función de las otras variables. Por ejemplo, consideremos la ecuación para lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$$

en donde la distancia focal  $f$  es función de las cantidades medidas la distancia al objeto  $o$  y la distancia a la imagen  $i$ . Podemos diferenciar la ecuación implícitamente, y obtenemos:

$$-\frac{df}{f^2} = -\frac{do}{o^2} - \frac{di}{i^2}$$

Es posible ahora calcular de manera directa  $df/f$ , y con más facilidad que si se escribe  $f$  explícitamente como función de  $o$  e  $i$  y se diferencia. De esta forma podemos preparar una fórmula para la incertidumbre en la que se pueden insertar directamente todas las incógnitas. Asegúrese de que se usen los signos adecuados para que todas las contribuciones a la incertidumbre se sumen para dar los límites extremos de posibilidad del resultado.

Cuando la función sea tan grande y complicada que no se pueda obtener un valor general de  $\delta z$ , siempre podemos tomar los valores medidos  $x_0, y_0$ , etc., y encontrar  $z_0$ . Podemos entonces trabajar con dos resultados diferentes, uno utilizando los valores numéricos propios de  $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y$  (o  $y_0 - \delta y$ , si es el

adecuado), etc., para obtener uno de los valores extremos de  $z$ , y el otro utilizando  $x_0 - \delta x$ , etc. Esos dos valores corresponderán a los límites de  $z$ , y así sabremos el valor de  $\delta z$ .

## 2-10 COMPENSACION DE ERRORES

Puede darse una situación especial cuando se trata con variables compuestas. Consideremos, por ejemplo, la relación bien conocida para el ángulo de mínima desviación  $D_m$  de un prisma con índice de refracción  $n$  y ángulo al vértice  $A$ :

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + D_m)}{\sin \frac{1}{2}A}$$

Si  $A$  y  $D_m$  son variables medidas con incertidumbres  $\delta A$  y  $\delta D_m$ , la cantidad  $n$  es el resultado requerido, con una incertidumbre  $\delta n$ . No obstante, sería falaz calcular la incertidumbre en  $A + D_m$ , luego en  $\sin \frac{1}{2}(A + D_m)$ , y combinarla con la incertidumbre en  $\sin \frac{1}{2}A$ , tratando la función como un cociente de dos variables. Eso se puede ver considerando el efecto en  $n$  de un incremento en  $A$ . Tanto  $\sin \frac{1}{2}(A + D_m)$  como  $\sin \frac{1}{2}A$  aumentan, y el cambio en  $n$  no es en consecuencia tan grande. La falacia consiste en aplicar los métodos de las secciones precedentes a variables que no son independientes (como son  $A + D_m$  y  $A$ ). El remedio sería reducir la ecuación a una forma en la que todas las variables sean independientes, o bien regresar a los principios básicos y usar directamente la ecuación 2-2. Los casos que tienen que ver con errores que se compensan deben de vigilarse con cuidado, ya que pueden, si se tratan en forma incorrecta, dar lugar a errores en los cálculos de incertidumbre que son difíciles de detectar.

## 2-11 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Como los cálculos tienen tendencia a producir resultados que consisten en largas filas de números, debemos de tener cuidado de citar el resultado final con sensatez. Si, por ejemplo, se nos da el voltaje a través de un resistor como  $15.4 \pm 0.1$  V, y la corriente como  $1.7 \pm 0.1$  A, podemos calcular el valor de la resistencia. La razón  $V/I$  que sale en mi calculadora es 9.0588235 ohms. ¿Es ésta la respuesta correcta?, claro que no. Un breve cálculo demuestra que la incertidumbre absoluta en la resistencia es cercana a 0.59 ohms. Así que, si las primeras dos cifras decimales del valor calculado son inciertas, es claro que el resto carece de sentido. Una afirmación como la de que  $R = 9.0588235 \pm 0.59$  ohms es, por lo tanto, absurda. Debemos de dar nuestros resultados de manera tal que la respuesta y su incertidumbre sean consistentes, p. ej.:  $R = 9.06 \pm 0.59$  ohms.

Pero, ¿esta afirmación es realmente válida? Recuerde que las incertidumbres citadas originalmente para  $V$  e  $I$  tenían el valor de  $\pm 0.1$ , que contiene una cifra significativa. Si no conocemos esas incertidumbres con mayor precisión, no tenemos derecho a atribuirle dos cifras significativas a la incertidumbre en  $R$ . Nuestro enunciado final, válido y consistente en sí mismo es, por lo tanto,  $R = 9.1 \pm 0.6$  ohms. Sólo si tuviéramos verdaderas razones para creer que nuestra incertidumbre original era exacta hasta la segunda cifra significativa, podríamos pretender hasta dos cifras significativas en la incertidumbre final y un valor calculado que corresponda con más precisión a  $R$ . En términos generales, debemos estar seguros de que los valores dados a la incertidumbre sean consistentes con la precisión de las incertidumbres básicas, y que el número de cifras que se dan en el resultado final sea consistente con su incertidumbre. Debemos de evitar las afirmaciones del tipo  $z = 1.234567 \pm 0.1$  o  $z = 1.2 \pm 0.000001$ .

## PROBLEMAS

1. Al usar un metro de madera para medir la longitud de mi escritorio. Estoy seguro de que es no menos de 142.3 cm y no más de 142.6. Enuncie esta medición como un valor central  $\pm$  incertidumbre. ¿Cuál es la incertidumbre relativa de la medición?
2. Al leer un voltímetro y un amperímetro de aguja y escala, y evalúo visualmente el margen de incertidumbre. Estoy seguro de que la lectura del amperímetro está entre 1.24 y 1.25 A, y la del voltímetro entre 3.2 y 3.4 V. Expresé cada medida como un valor central  $\pm$  incertidumbre, y evalúe la incertidumbre relativa de cada medición.
3. Un reloj digital da una lectura de la hora de 09:46. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta de la medida?
4. Si se puede leer un metro de madera con una incertidumbre absoluta de  $\pm 1$  mm, ¿cuál es la distancia más corta que puedo medir para que la incertidumbre relativa no exceda el a) 1%, b) 5%?
5. Al usar un termómetro graduado en  $\frac{1}{5}$  grado Celsius para medir la temperatura del aire exterior. Medida con una aproximación de  $\frac{1}{5}$  de grado, la temperatura de ayer fue de 22.4°, y la de hoy es de 24.8° Celsius. ¿Cuál es la incertidumbre relativa en la diferencia de temperaturas entre ayer y hoy?
6. El reloj del laboratorio tiene un segundero que se mueve por pasos de un segundo. Lo uso para medir un cierto intervalo de tiempo. Al principio del intervalo marcaba las 09:15:22 (horas:minutos:segundos), y al final las 09:18:16. ¿Cuál es la incertidumbre relativa del intervalo medido?

7. En el escritorio mencionado en el problema 1, se mide el ancho, y se está seguro de que la medida cae entre 78.2 y 78.4 cm. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta en el área calculada de la cubierta del escritorio?
8. Al medir la resistencia de un resistor, la lectura del voltímetro era de  $15.2 \pm 0.2$  V, y la lectura del amperímetro era de  $2.6 \pm 0.1$  A. ¿Cuál es la incertidumbre absoluta de la resistencia calculada usando la ecuación  $R = V/I$ ?
9. Un péndulo simple se usa para medir la aceleración de la gravedad, usando  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ . El periodo  $T$  medido fue de  $1.24 \pm 0.02$  seg y la longitud de  $0.381 \pm 0.002$  m. ¿Cuál es el valor resultante de  $g$  con su incertidumbre absoluta y relativa?
10. Un experimento para medir la densidad  $d$  de un objeto cilíndrico utiliza la ecuación  $d = m/\pi r^2 l$ , en donde:

$$\begin{aligned} m &= \text{masa} &= 0.029 \pm 0.005 \text{ kg} \\ r &= \text{radio} &= 8.2 \pm 0.1 \text{ mm} \\ l &= \text{longitud} &= 15.4 \pm 0.1 \text{ mm} \end{aligned}$$

¿Cuál es la incertidumbre absoluta del valor calculado de la densidad?

11. La distancia focal,  $f$ , de un lente delgado se va a medir usando la ecuación  $1/o + 1/i = 1/f$ , en donde:
- $$\begin{aligned} o &= \text{distancia al objeto} &= 0.154 \pm 0.002 \text{ m} \\ i &= \text{distancia a la imagen} &= 0.382 \pm 0.002 \text{ m} \end{aligned}$$
- ¿Cuál es el valor calculado de la distancia focal, su incertidumbre absoluta y su incertidumbre relativa?

12. Una rejilla de difracción se usa para medir la longitud de onda de la luz, usando la ecuación  $d \sin \theta = \lambda$ . El valor medido de  $\theta$  es de  $13^\circ 34' \pm 2'$ . Suponiendo que el valor de  $d$  es de  $1420 \times 10^{-9}$  m y que se puede ignorar su incertidumbre, ¿cuál es la incertidumbre absoluta y la relativa en el valor de  $\lambda$ ?
13. Se da un valor como  $14.253 \pm 0.1$ . Reescribalo con el número adecuado de cifras significativas. Si el valor se diera como  $14.253 \pm 0.15$ , ¿cómo debería de escribirse?
14. Se da un valor como  $6.74914 \pm 0.5\%$ . Enúncielo como un valor  $\pm$  incertidumbre absoluta, ambos con el número adecuado de cifras significativas.

# 3

## Estadística de la observación

### 3—1 INCERTIDUMBRE ESTADISTICA

En el capítulo anterior nos ocupamos de las mediciones en las cuales la incertidumbre podía estimarse usando un criterio personal. En ellas, suponiendo que hayamos juzgado la situación con exactitud, la medición sistemática deberá producir resultados coherentes. A veces, no obstante, la medición reiterada conduce a resultados claramente diferentes. Por ejemplo, si usamos un contador y registrador electrónico Geiger para medir la actividad de una fuente radiactiva, y decidimos obtener, para una configuración dada, la cantidad de partículas en un intervalo de 10 segundos, encontraríamos que los resultados obtenidos al contar varios intervalos sucesivos de 10 segundos *no* son iguales. Podemos encontrarnos con la misma situación en mediciones que implican un discernimiento visual. Si, por ejemplo, queremos encontrar la imagen formada por una lente delgada, acaso no seamos capaces de determinar la posición de la imagen con suficiente exactitud como para obtener, en forma repetida, la misma lectura en un buen medidor de alta precisión. Ya sea que la fluctuación resulte inherente al sistema sujeto a investigación (como en la fuente radiactiva, donde la fluctuación surge de la naturaleza esencial de la desintegración radiactiva espontánea), o que provenga de nuestras dificultades para efectuar la medición, debemos aprender a hacer afirmaciones sensatas sobre mediciones que muestren variaciones de este tipo.

¿Qué clase de afirmaciones será posible hacer? Ya no podemos, como antes, aseverar al tenor de “Estoy prácticamente seguro de que la respuesta se

halla en el intervalo. . .”. De hecho, haciendo a un lado por completo la imposibilidad de obtener respuestas “correctas”, encontraremos que la dificultad estriba no tanto en la elaboración de respuestas razonables, sino en saber qué preguntas inteligentes hacer. Descubriremos entonces que las únicas preguntas sensatas implican, como al principio, intervalos en nuestra escala de valores; esta vez, empero, interpretados en términos de probabilidad y no de certidumbre. Nuestra búsqueda de una solución será indudablemente prolongada, mas, al cabo, la respuesta resultará sencilla y elegante.

Para iniciar nuestra indagación, volvamos a la situación original. Supongamos que hemos hecho una sola medición, y que, para comprobar nuestro trabajo, hemos efectuado esta medición por segunda vez y obtuvimos un resultado diferente. ¿Qué se supone que debemos hacer? No podemos, en modo alguno, afirmar que una es “correcta” y la otra “errónea”. ¿Cuál podríamos elegir como la “correcta”? Frente a esta ambigüedad, la reacción natural sería intentarlo una tercera vez, con la esperanza, quizás, de que la tercera medición confirme una u otra de las dos primeras. Muy probablemente ésta no sea tan complaciente, y simplemente aumente aún más la confusión al ofrecer una tercera posibilidad. Enfrentados a esta complejidad creciente, podríamos resolver seguir efectuando mediciones para ver qué sucede. Supongamos que nuestra curiosidad nos ha impulsado a realizar una cantidad considerable de mediciones sucesivas, digamos 100, y ahora nos preguntamos: ¿Cuál es la respuesta? Como mencionábamos antes, es más significativo plantearse: ¿cuál es la pregunta? Eso depende mucho de la aplicación que queramos darle a los resultados. Un físico que mide la posición de una imagen óptica acaso esté buscando algo que a él le gustaría considerar como la respuesta “correcta”. Una persona que mida la actividad de una fuente radiactiva quizás desee emplear el resultado en forma tal que se vea obligado a determinar la cantidad de partículas que obtendrá en un intervalo de 10 segundos el día siguiente. Un sociólogo que efectúa una encuesta de opinión pública tal vez quiera pronosticar el resultado de las próximas elecciones, etc. No hay una sola pregunta ni una respuesta única. El tratamiento que demos a nuestros resultados fluctuantes dependerá de las circunstancias. Consideremos ahora algunas de las posibilidades.

### 3—2 HISTOGRAMAS Y DISTRIBUCIONES

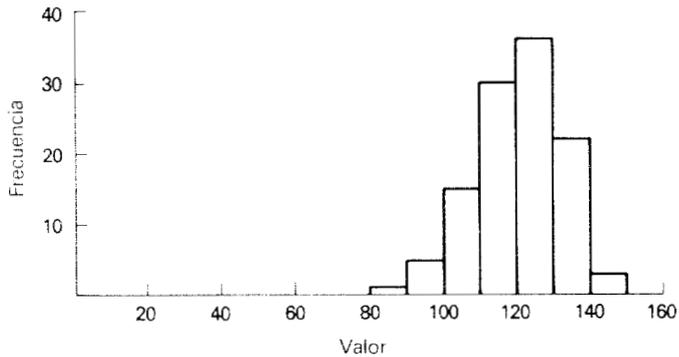
Supongamos que hemos efectuado ya 100 mediciones de cierto parámetro y que ahora debemos dar a conocer nuestros resultados. La primera respuesta a la pregunta ¿Qué se obtuvo?, es la contestación más bien inadecuada de “Ejecuté la medición 100 veces, y aquí están los 100 resultados”. Esto quizá no tenga errores, pero difícilmente resultará útil. A nuestro auditorio se le hará

difícil encontrarle sentido a una simple lista de números y, naturalmente surgirán preguntas tales como: ¿Hay alguna regularidad en los resultados?, ¿alguno de ellos aparece con más frecuencia que los demás?, etc. A fin de mostrar las características de las mediciones con más claridad, valerse de algún tipo de presentación gráfica resultaría, sin duda, muy útil.

Una forma común de presentación es el histograma. Para construir este diagrama, se divide la escala sobre la cual se extienden las mediciones en intervalos, y se determinan los resultados que corresponden a cada intervalo. Se grafican luego estas cantidades en una escala vertical, en función de los intervalos mismos. Es conveniente usar un diagrama de barras para indicar los grupos de resultados, lo cual resultará similar a la figura 3-1. De inmediato, nuestra

**Tabla 1**

85	109	114	121	127	131
92	109	114	121	127	132
96	110	114	122	127	133
97	110	115	122	127	134
97	111	116	122	128	134
97	111	116	122	128	134
100	111	116	122	128	134
101	111	117	123	128	135
101	111	117	123	128	136
102	112	118	123	128	137
102	112	118	123	130	137
103	112	119	123	130	137
103	113	119	124	130	144
105	113	120	124	130	148
106	113	120	124	130	149
106	113	120	125	130	
107	113	120	125	131	
108	113	121	125	131	
108	114	121	126	131	



**Figura 3-1** Un conjunto de observaciones y su histograma.

comprensión de las mediciones mejora enormemente, pues ahora podemos apreciar de un solo vistazo cómo se *distribuyen* los valores a lo largo de la escala. Esta distribución es la clave para una interpretación satisfactoria de las mediciones. Normalmente encontramos que los resultados tienden a presentarse con más frecuencia en la mitad del rango, y si la situación es así y no estamos en posibilidad de hacer ninguna otra afirmación sensata, siempre podremos consolarnos con aseverar simplemente que las observaciones tienen una “tendencia central”. Eso puede ser suficiente, y una vez que hallamos desarrollado el histograma, podremos dar por concluida esta fase de nuestro trabajo. Muchos resultados de procesos de medición se presentan con sencillez mediante el histograma correspondiente. Gracias a éste, el lector puede apreciar la distribución y sacar sus propias conclusiones.

### 3—3 VALORES CENTRALES DE LAS DISTRIBUCIONES

A menudo, sin embargo, queremos ir más lejos y, a guisa de sustituto del histograma completo, deseamos encontrar alguna forma abreviada de describir la distribución sin tener que mostrar efectivamente el diagrama completo. Podemos, por tanto, buscar respuestas a preguntas como: ¿Qué resultado *particular* caracteriza mejor al grupo de observaciones en su totalidad? Hay varios valores posibles para esta designación, y escogemos uno de ellos, con base en el uso futuro que daremos a la información. Las diferentes posibilidades son:

#### a) La moda

La mayoría de las distribuciones tienen un punto máximo o pico cerca del centro. Si ese pico está bien definido, el valor sobre la escala horizontal en que ocurre se llama **moda** de la distribución. Siempre que queramos llamar la atención sobre esta concentración central de nuestros valores medidos, mencionamos el valor modal. A veces una distribución tendrá dos puntos máximos; en este caso la denominamos distribución **bimodal** y señalamos los dos valores modales.

#### b) La mediana

Si colocamos todos nuestros resultados en orden numérico y los dividimos a la mitad en dos partes iguales, el valor correspondiente a esta línea divisoria se llama **mediana**. Como es obvio que las áreas bajo las gráficas de distribución representan grupos de observaciones (la barra de la izquierda de la figura 3-1 representa 5 observaciones; la segunda de la izquierda 9; por tanto las dos juntas representan 14, y así sucesivamente), la mediana es aquel valor en el cual una línea vertical divide a la distribución en dos partes de área equivalen-

tes. La mediana suele citarse a menudo en la investigación sociológica; se habla, por ejemplo, de la mediana de los salarios de ciertos grupos de empleados, etc.

### c) La media

El tercero de los valores comúnmente citados es el conocido promedio o media aritmética. Para un grupo de  $N$  observaciones,  $x_i$ , la media  $\bar{x}$  se define como

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \quad (3-1)$$

Más adelante veremos que, para nuestros propósitos, la media es la más útil de las tres cantidades que hemos definido.

Nótese que, para una distribución simétrica, la media, la mediana y la moda coinciden todas en el centro de la distribución. Si, por otra parte, la distribución no es simétrica, cada una tendrá un valor diferente. Para el histograma que aparece en la figura 3-1, los valores de la media, la mediana y la moda se muestran en la figura 3-2, que ilustra su relación con la distribución. Si la distribución es marcadamente asimétrica, la diferencia entre la moda, la mediana y la media puede ser sustancial. Considere, por ejemplo, la distribución del ingreso familiar en un país dado. La presencia de millonarios, aunque sean relativamente pocos, tiene un efecto sobre la media que contrarresta a muchos miembros de la población en el extremo inferior de la escala de salarios. De esta manera, la moda y la media difieren sustancialmente. Este ejemplo ilustra el cuidado que se requiere para interpretar las estadísticas que se manejan. Habitualmente, las personas que emplean datos estadísticos suelen hacerlo en la forma que más conviene a sus propósitos específicos.

## 3-4 AMPLITUD DE LAS DISTRIBUCIONES

Consideremos ahora otra cuestión: ¿En qué medida nuestro valor elegido representa a la distribución en su conjunto? Esto es, cuán seguro resulta usar un solo valor como sustituto de toda la distribución? Ahora no podemos justificar los procedimientos que a continuación se describirán. En su lugar, confiaremos en la intuición de que, cuanto más amplia sea la distribución, menor será la importancia que podamos asignar a cualquiera de los tres valores centrales. Por otra parte, cuanto más estrecha sea la distribución, tanto más autorizados nos sentiremos a confiar en la media, la moda o la mediana como los valores representativos de la distribución.

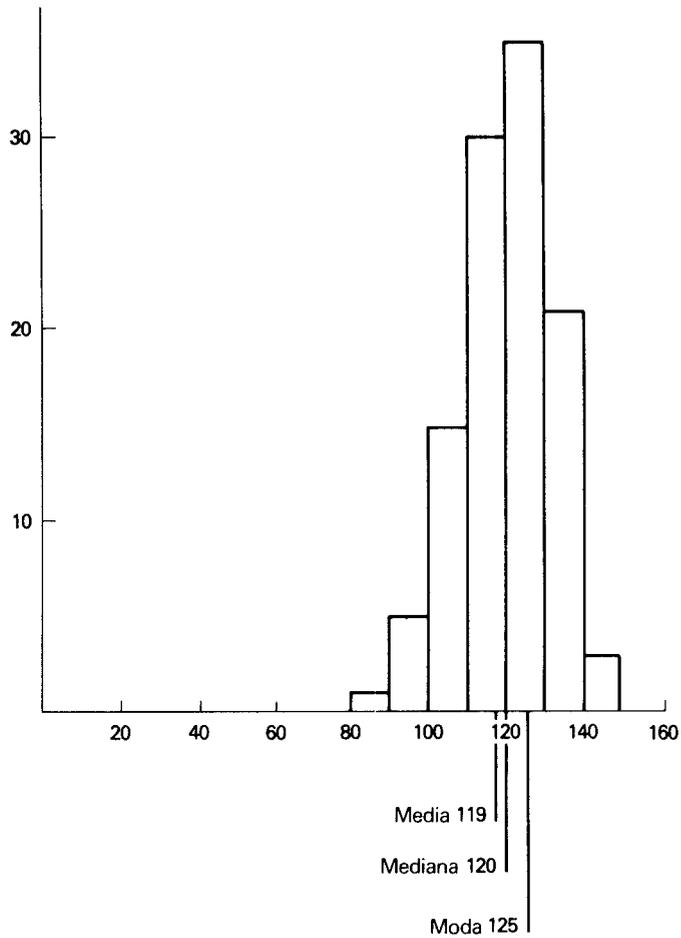


Figura 3-2 La relación entre un histograma y su media, mediana y moda.

Formulemos, pues, una cantidad que será una medida de la amplitud de la distribución. Podríamos inventar muchas de tales cantidades, pero, por razones de las que no es preciso ocuparnos por ahora, determinaremos una cantidad de uso casi universal. Definimos la **desviación estándar** de la distribución  $S$ , como

$$S = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{N}} \quad (3-2)$$

La definición es hasta cierto punto arbitraria porque, al definir una medida de la amplitud de la distribución, pudimos haber escogido otras potencias de la cantidad  $(\bar{x} - x)$ , y empleado otros denominadores. Hay, sin embargo, varias razones para esa elección; estas razones y la importancia de la desviación estándar se aclararán en breve.

Aquí podemos hacer una pausa para resumir el progreso alcanzado hasta ahora. Si hemos hecho ya mediciones sucesivas de una cantidad dada y queremos establecer el resultado en términos numéricos, tenemos varias opciones al respecto: a) desarrollar el histograma correspondiente; b) dar la moda, la mediana, o la media como parámetros de la localización de la distribución, y c) considerar la desviación estándar como medida de la confianza que podemos tener en los resultados. A veces dejamos el resultado de un proceso de medición en esta forma; las cantidades involucradas se entienden universalmente, y el procedimiento es aceptable.

Para nuestro propósito actual, buscamos una interpretación cuantitativa más detallada de los valores citados.

### 3—5 IMPORTANCIA DE LA MEDIA Y LA DESVIACION ESTANDAR

En esta sección y las siguientes, por razones que resultarán claras más adelante, pasaremos por alto la moda y la mediana y nos restringiremos a la interpretación numérica de la media y la desviación estándar. Ya que la presencia de fluctuaciones al azar nos ha privado de la oportunidad de identificar un intervalo realista dentro del cual podemos estar seguros de que se encuentra nuestro valor buscado, debemos cambiar nuestras expectativas del proceso de medición. Como hemos dicho antes, no es tanto cuestión de obtener respuestas razonables a las preguntas que nos hacemos, sino como el saber qué preguntas inteligentes cabe hacer. Específicamente, por supuesto que no tiene sentido preguntar: ¿Cuál es la respuesta correcta? Ni siquiera es razonable plantearse: Después de cien observaciones de este parámetro, ¿qué obtendré en la próxima medición? Las únicas preguntas sensatas tienen que ver no con la certeza, sino con la probabilidad, y son varias las interrogantes distintas que cabe hacer sobre probabilidades.

Podríamos preguntar, por ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de que el resultado 101 forme parte de un cierto intervalo de valores en nuestra escala? Esta es una pregunta inteligente, y con base en ella pueden concebirse fácilmente varias respuestas razonables. Si, por ejemplo, de nuestras 100 mediciones originales, una cierta porción de los resultados queda incluida en ese intervalo particular, podríamos, con todo derecho, elegir esa fracción como el índice de

probabilidad que buscamos. Esa no sería una suposición aventurada, y bien podríamos proponer una descripción normalizada de nuestra distribución considerando la porción de la totalidad de mediciones efectuadas que corresponde a un intervalo especificado, como  $x \pm S$ . Esto transmitiría satisfactoriamente información sobre nuestro conjunto de observaciones a otras personas, pero surge un problema mayor cuando descubrimos que nuestros resultados de probabilidades están específicamente relacionados con nuestro histograma en particular. Si tuviéramos que efectuar otra serie de 100 observaciones manteniendo todas las condiciones igual que al principio, con la esperanza de obtener el mismo histograma, quedaríamos decepcionados. El nuevo histograma no coincidiría con el primero con exactitud. Podría tener características generales semejantes con respecto a su localización y amplitud, pero su estructura detallada no sería la misma que antes, y por tanto obtendríamos respuestas diferentes a preguntas sobre probabilidades.

¿Cómo, entonces, encontraremos respuestas a nuestras interrogantes de modo tal que aquéllas revistan cierta importancia cuantitativa ampliamente comprendida? Una solución consiste en desistir describir nuestro histograma en particular y empezar a hablar sobre distribuciones teóricas definidas. Estas pueden no ser claramente significativas para nuestro conjunto particular de observaciones, pero ofrecen la enorme ventaja de que, como son construcciones teóricas definidas, tienen propiedades que son definidas, constantes, y ampliamente comprendidas. Muchas de esas distribuciones teóricas se han desarrollado para propósitos especiales, pero aquí nos ocuparemos de una sola: la distribución Gaussiana o “normal”.

La distribución de Gauss se utiliza para interpretar muchos tipos de mediciones físicas, en parte debido a que las circunstancias mecánicas de muchas mediciones físicas guardan estrecha correspondencia con los fundamentos teóricos de la distribución Gaussiana, y en parte porque la experiencia demuestra que la estadística Gaussiana sí proporciona una descripción razonablemente exacta de muchos sucesos reales. Sólo para otro tipo común de mediciones físicas es más apropiada otra distribución: al observar fenómenos como la desintegración radiactiva debemos emplear la distribución conocida como distribución de Poisson, pero, aun en casos como éste, la diferencia con la estadística de Gauss resulta significativa sólo en niveles de muy bajas ocurrencias. Puede ahondarse en la estadística de Poisson en libros que se ocupen de métodos experimentales de la física nuclear o la de alta energía. A excepción de estos casos especiales, podemos sentirnos razonablemente seguros de que la estadística Gaussiana puede aplicarse con provecho a la mayoría de las mediciones reales. Sin embargo, debemos recordar siempre que, a menos que efectivamente comprobemos que nuestras mediciones corresponden a una distribución de Gauss, estamos dando por hecho que la estadística Gaussiana es aplicable y

que, por tanto, debemos mantenernos alerta frente a cualquier evidencia que invalide esta hipótesis.

### 3-6 DISTRIBUCION DE GAUSS Y MUESTREO

Aun cuando, para utilizarla con provecho, no hace falta saber mucho sobre los orígenes de la distribución de Gauss, es interesante saber por qué su deducción le confiere especial importancia para muchas mediciones físicas. La distribución de Gauss puede deducirse a partir de la hipótesis de que la desviación total de una cantidad medida  $x$ , respecto de un valor central  $X$ , es la resultante de una gran cantidad de pequeñas fluctuaciones que ocurren al azar. Para construir un modelo sencillo de esta situación, supongamos que hay  $m$  de esas contribuciones a la desviación total, cada una de igual magnitud  $a$ , y con la misma probabilidad de ser positiva o negativa. Si repetimos el proceso de medición muchas veces, obtendremos un conjunto de valores que van de  $X + ma$ , para una observación en la que todas las fluctuaciones resultan ser positivas simultáneamente, a  $X - ma$ , si todas ocurren en sentido negativo. Para una suma aleatoria como ésta, de cantidades positivas y negativas (como en la "caminata al azar"), puede demostrarse que la suma más probable es cero, lo que significa que los valores más comunes de  $x$  están en la vecindad de  $X$ . Por tanto, la curva de distribución tiene un valor máximo hacia la mitad, es simétrica, y decae suavemente a cero en  $x = X + ma$  y  $x = X - ma$ . Si este concepto se lleva al caso límite en el que un número infinito de desviaciones infinitesimales contribuyen a la desviación total, la curva tiene la forma que se muestra en la figura 3-3. Considerando a la curva exclusivamente desde el punto de vista matemático por ahora, su ecuación puede expresarse así:

$$y = Ce^{-h^2(x-X)^2} \quad (3-3)$$

Aquí la constante  $C$  es una medida de la altura de la curva, ya que  $y = C$  para  $x = X$ , en el centro de la distribución. La curva es simétrica alrededor de  $x = X$  y tiende a cero asintóticamente. Es obvio que la cantidad  $h$  determina la amplitud de la curva, ya que sólo es un multiplicador en la escala  $x$ . Si  $h$  es grande, la curva es estrecha y alta en relación a su amplitud; si es pequeña, la curva es baja y ancha. La cantidad  $h$  sin duda debe de estar relacionada con la desviación estándar  $\sigma$  de la distribución, y se puede demostrar que la relación en cuestión es

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2} h} \quad (3-4)$$

(Emplearemos letras latinas, por ejemplo  $S$  para la desviación estándar, para las cantidades asociadas con conjuntos finitos de observaciones reales; y letras

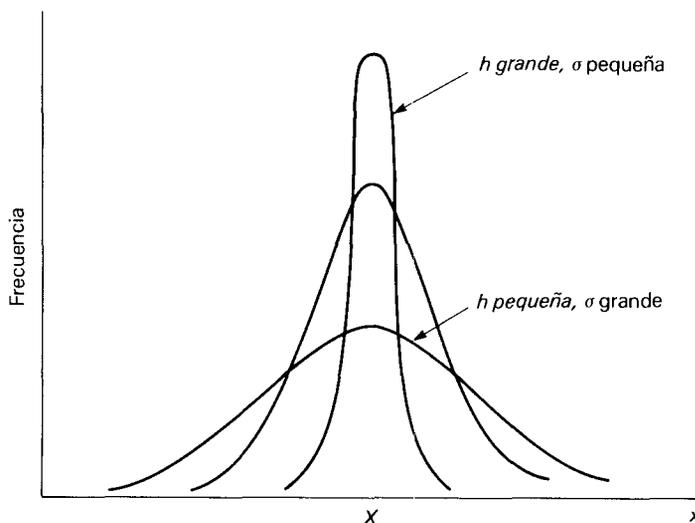


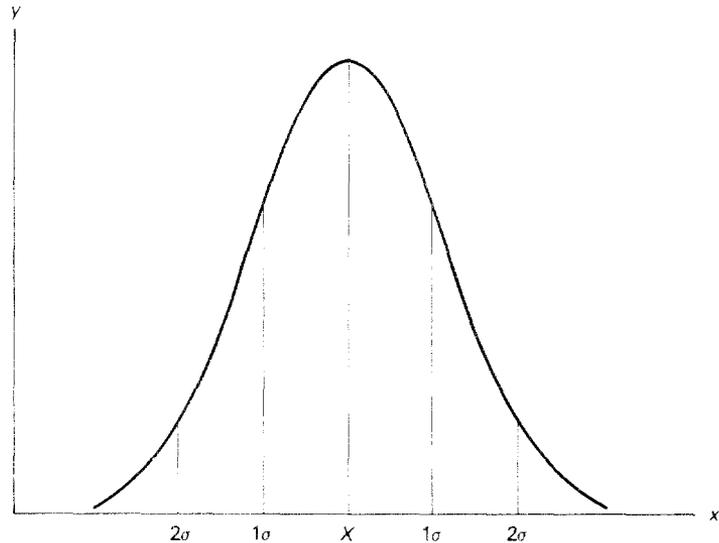
Figura 3-3 La curva de distribución Gaussiana.

griegas, como  $\sigma$ , al referirnos a distribuciones definidas, o a un “universo” de observaciones, según se describe en la sección 3-7.)

Ahora que tenemos una ecuación definida para la distribución, toda la ambigüedad original sobre la interpretación de la desviación estándar en términos de probabilidad desaparece, y tenemos valores definidos, únicos y permanentes. Por ejemplo, el área incluida dentro del intervalo  $X \pm \sigma$  para una distribución Gaussiana es de 68%, y dentro del intervalo  $X \pm 2\sigma$  es de 95%, e igual ocurre para *todas* las distribuciones Gaussianas. La relación entre los valores de  $\sigma$  y las áreas bajo la curva de distribución normal se muestra en la figura 3-4 con las líneas verticales trazadas a intervalos de  $1\sigma$  y  $2\sigma$  a partir del valor central. Es muy conveniente contar con valores definidos como éstos, porque podemos afirmar sin lugar a dudas que cualquier valor particular en un conjunto Gaussiano tiene una probabilidad del 68% de estar incluido en el intervalo  $X \pm \sigma$ , y una probabilidad del 95% de caer dentro de  $X \pm 2\sigma$ . En el apéndice 1 se encontrará una explicación más detallada de las propiedades matemáticas de la distribución Gaussiana.

### 3-7 RELACION ENTRE LA DISTRIBUCION DE GAUSS Y LAS OBSERVACIONES REALES

Los resultados ofrecidos en la sección anterior proporcionan métodos útiles y precisos para interpretar las medias y las desviaciones estándar, pero los problemas



**Figura 3-4** La relación de  $1\sigma$  y  $2\sigma$  con los límites de la distribución Gaussiana.

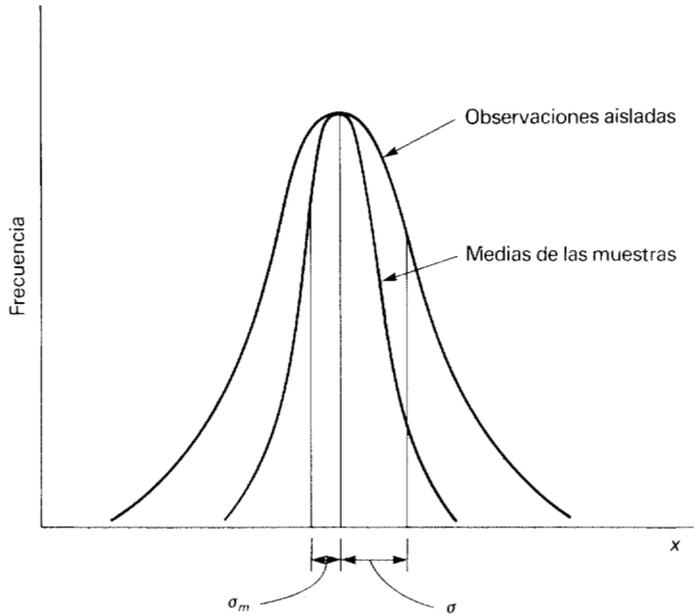
surgen cuando empezamos a aplicar esas ideas a las mediciones reales. Índices como el 68 y el 95% se refieren a una construcción teórica, la distribución de Gauss, y todo lo que tenemos es una, o unas cuantas observaciones reales de la cantidad deseada. Para empezar, no tenemos forma de saber qué distribución Gaussiana, con sus respectivos valores de  $X$  y  $\sigma$ , es adecuada para nuestras observaciones. Así pues, ¿qué debemos hacer? La respuesta reside en un concepto que sirve de puente entre el mundo de las construcciones teóricas y el de las mediciones reales. Para un instrumento o para un proceso de medición, procedemos a inventar el concepto del conjunto infinito de observaciones que *podrían* hacerse con él. Por supuesto, por razones bastante obvias, ese número infinito de observaciones nunca se llevará a cabo, pero el concepto nos permite interpretar nuestras mediciones reales. Esta construcción se denomina el “universo” o “población” de esa medición en particular. Una vez que hemos efectuado, digamos, 100 observaciones con nuestro instrumento del caso, tenemos la tendencia a creer que no existe nada más que nuestros 100 valores. Debemos, en cambio, invertir nuestra forma de pensar y considerar a nuestro conjunto de observaciones como una “muestra” del universo o población infinitamente grande de las observaciones que podrían llevarse a cabo. Este universo, con todo, permanecerá siempre inaccesible para nosotros; jamás conoceremos su distribución total o su media o desviación estándar correspondientes. Nuestra tarea, entonces, consistirá en desarrollar inferencias a partir de estas cantidades basadas en las propiedades claramente conocidas de nuestra muestra.

Desde que estamos haciendo supuestos con base en varias bien definidas hipótesis. En primer lugar, daremos por sentado que la distribución del universo en cuestión es Gaussiana, y llamaremos  $X$  a su media y  $\sigma$  a su desviación estándar. Esta suposición nos permite hacer afirmaciones como ésta: si efectuamos una sola medición con nuestro equipo, ésta tiene una probabilidad del 68% de estar incluida en  $X \pm \sigma$ , y una probabilidad del 95% de formar parte de  $X \pm 2\sigma$ . Esta parece una proposición alentadoramente exacta y explícita, pero adolece de un defecto abrumador: no sabemos (ni jamás sabremos) cuáles son los valores de  $X$  y  $\sigma$ . En otras palabras, el hacer una sola observación de un parámetro sujeto a fluctuación al azar, no habremos ganado prácticamente nada. Sólo podremos afirmar que nuestro valor tiene una probabilidad del 68% de estar incluido en algo y a cierta distancia de algo más, lo que no es de gran utilidad. Nuestra única esperanza radica en obtener alguna información, aunque sea dudosa, acerca de la distribución del universo en cuestión. Como ya hemos afirmado, jamás podremos determinar la distribución del universo con toda exactitud, porque eso requeriría de un número infinito de observaciones. Sólo podemos confiar en que, si repetimos nuestro proceso de medición razonablemente para obtener una muestra del universo, esta muestra nos permitirá hacer alguna estimación de los parámetros del universo en su totalidad.

Puesto que estamos partiendo de la premisa básica de que la distribución del universo es una función matemática definida (ya sea Gaussiana o de algún otro tipo, también bien-definida), podemos evaluar matemáticamente las propiedades de las muestras con respecto a las del universo de observaciones individuales. Aquí enunciaremos simplemente estas propiedades sin demostrarlas. Se recomienda al lector interesado en la deducción matemática de estos resultados que consulte a los textos tradicionales de estadística, en donde encontrará secciones que tratan de la teoría del muestreo.

Las propiedades de las muestras se aclaran si consideramos el concepto de muestreo repetido. Consideremos que hemos hecho 100 observaciones con cierto dispositivo. Esta será nuestra primera muestra. Calculemos ahora su media y su desviación estándar y anotémoslas. Efectuemos a continuación otro conjunto de 100 observaciones y anotemos su media y su desviación estándar correspondientes. Repitamos el proceso hasta tener un número infinito de muestras, cada una con su propia media y desviación estándar, grafiquemos luego las curvas de distribución de las medias y las desviaciones estándar respectivas. Por supuesto que nunca llevaremos a cabo un proceso como éste con observaciones reales, pero, conociendo la función matemática representativa de nuestro universo original de observaciones aisladas, podemos simular matemáticamente ese muestreo repetido, y deducir así las propiedades de las muestras en comparación con las del universo original de observaciones particulares. Los resultados de tales cálculos de la distribución de medias y desviaciones

estándar de las muestras pueden apreciarse en las figuras 3-5 y 3-6, y se explicarán más ampliamente en las secciones siguientes.



**Figura 3-5** Curva de distribución de observaciones aisladas y medias de la muestra. (Nótese que la escala vertical de las dos curvas no es la misma. Se han graficado con un valor máximo común, solamente para propósitos de ilustración.)

### 3-8 MEDIA DE LA MUESTRA Y DESVIACION ESTANDAR DE LA MEDIA

Si la distribución del universo de observaciones aisladas es Gaussiana, la teoría del muestreo indica que la distribución de las medias de la muestra también es Gaussiana. Además, la distribución de medias de la muestra tiene otras dos propiedades muy importantes. Primera: está centrada en  $\bar{X}$ , el centro de la distribución original de observaciones individuales; segunda: es más estrecha que la distribución original. Esa estrechez es muy significativa, porque demuestra de inmediato la mejora en precisión derivada de las muestras, en comparación con las observaciones aisladas; las medias de las muestras se agrupan con mayor densidad alrededor de la media del universo que en el caso de las observaciones aisladas. La dispersión reducida de las medias de las muestras se representa con un parámetro muy importante: la desviación estándar de la

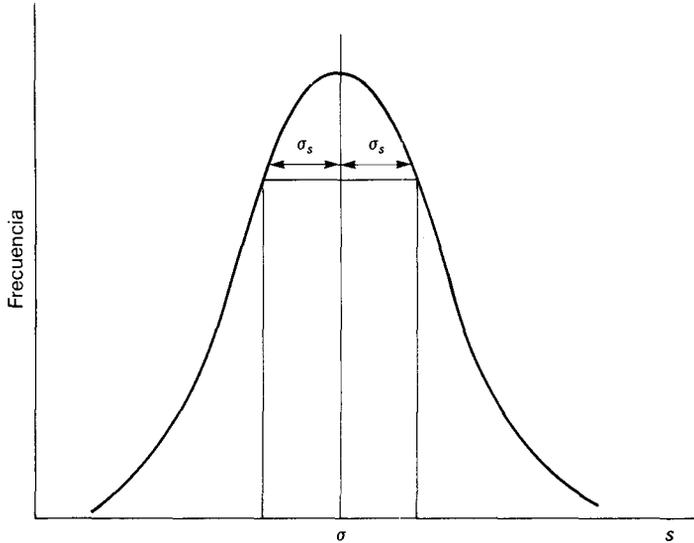


Figura 3-6 La distribución de desviaciones estándar de la muestra.

distribución de medias de las muestras. Este parámetro se denomina la **desviación estándar de la media**, y su valor es

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3-5)$$

donde  $N$  es la cantidad de observaciones de la muestra. Así pues, una muestra en particular tiene un 68% de probabilidad de estar incluida en el intervalo  $X \pm \sigma_m$ , y un 95% de probabilidad de formar parte del intervalo  $X \pm 2\sigma_m$ . Estos intervalos son más pequeños que los correspondientes a observaciones aisladas, y proporcionan una medida cuantitativa de la precisión mejorada que es posible lograr con el muestreo.

Obsérvese que la proposición sobre medias de las muestras, si bien es precisa, aún no nos sirve de mucho, pues todavía incluye los parámetros desconocidos  $X$  y  $\sigma$ . La resolución de esta dificultad y la importancia de la desviación estándar de la muestra se pondrán en claro muy pronto. Mientras tanto, fijemos brevemente nuestra atención en la otra propiedad importante de las muestras: la distribución de las desviaciones estándar de las muestras.

### 3-9 DESVIACION ESTANDAR DE LA MUESTRA

Las desviaciones estándar de la muestra corresponden también a una distribución Gaussiana, cuyo centro constituye la desviación estándar del universo,  $\sigma$ .

La distribución se ilustra en la figura 3-6. Sin embargo, como podrá apreciarse en seguida, la varianza de las desviaciones estándar de las muestras no nos interesará tanto como la varianza de las medias de las muestras, y pospondremos hasta la sección 3-11 un análisis adicional de la varianza de las desviaciones estándar de las muestras.

### 3-10 APLICACION DE LA TEORIA DE MUESTREO A LAS MEDICIONES REALES

Las propiedades de la muestra que acabamos de presentar son muy interesantes, pero, ¿cómo pueden ayudarnos si no tenemos acceso a las distribuciones reales, ya sea para las medias o para las desviaciones estándar de las muestras? Tenemos una muestra aislada con su media y su desviación estándar, y ninguna idea respecto de cómo se relacionan éstas con los valores del universo del caso. Nuestro problema, por tanto, consiste en encontrar una relación entre los resultados teóricos y las propiedades de las muestras que nos permitan inferir las propiedades del universo a partir de los valores de la muestra. Como es obvio, no podemos esperar obtener una información exacta. Además, debemos partir de una premisa básica, evidentemente imprecisa: suponemos que nuestro único parámetro, la desviación estándar de la muestra, nos proporciona, a su vez, el parámetro de la desviación estándar del universo respectivo. De hecho, puede demostrarse que la “mejor estimación” de la desviación estándar del universo está dada por la cantidad

$$S = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{N - 1}} \quad (3-6)$$

Esta difiere sólo un poco de nuestro valor original de la desviación estándar para un conjunto dado de observaciones. La  $N$  en el denominador de la expresión original se ha cambiado por  $N - 1$ , y la diferencia entre las dos cantidades, obviamente, resulta significativa sólo para valores pequeños de  $N$ . De aquí en adelante, cuando hablemos de la desviación estándar de una muestra, daremos por sentado que estamos usando la ecuación en esta nueva forma, y que en realidad estaremos considerando la “mejor estimación” del valor del universo,  $\sigma$ .

Admitiendo a nuestra desviación estándar de la muestra como la mejor estimación de  $\sigma$ , estamos ahora en condiciones de hacer una clara proposición sobre nuestra muestra aislada. Podemos reformular la ecuación 3-5 y definir

$$S_m = \frac{S}{\sqrt{N}} \quad (3-7)$$

como la desviación estándar de la media, que ahora es una cantidad conocida derivada de nuestra muestra real. Ahora podemos afirmar: nuestra media de la muestra  $\bar{x}$  tiene una probabilidad del 68% de estar incluida en  $X \pm S_m$ , y una probabilidad del 95% de formar parte de  $X \pm 2S_m$ . Esta es una afirmación más aproximada a lo que necesitamos, pero todavía no es completamente satisfactoria. Nos dice algo acerca de una cantidad que conocemos,  $\bar{x}$ , en términos de otra que ignoramos,  $X$ . En realidad necesitamos que la proposición sea a la inversa: queremos poder afirmar algo sobre nuestra incógnita  $X$ , en términos de una cantidad  $\bar{x}$ , cuyo valor sí conocemos. Por fortuna, es posible probar que la proposición inicial sobre probabilidades puede invertirse para producir nuestro resultado deseado. Con ello, deduciremos la proposición por la cual hemos estado trabajando desde que empezamos nuestro análisis sobre la estadística de las cantidades fluctuantes. Nuestra proposición final es: Hay una probabilidad del 68% de que la media del universo,  $X$ , esté incluida en el intervalo  $\bar{x} \pm S_m$ , y del 95% de que forme parte del intervalo  $\bar{x} \pm 2S_m$ . Esta ya es, por último, una afirmación sobre la cantidad desconocida,  $X$ , en términos de cantidades perfectamente identificadas,  $\bar{x}$  y  $S_m$ . Sobre nuestra escala de valores  $x$  tenemos ahora un intervalo real y conocido entre  $\bar{x} - S_m$  y  $\bar{x} + S_m$ , y sabemos que hay una probabilidad del 68% de que nuestro parámetro buscado  $X$  forme parte de este intervalo.

Esta afirmación nos proporciona la respuesta que hemos estado buscando, y nos acerca tanto como es posible a la información exacta sobre el valor central fijo de nuestro parámetro observado. Vale la pena familiarizarse muy bien con los argumentos que hemos expuesto en las secciones anteriores; el proceso de medición consiste en mucho más que simplemente hacer unas cuantas observaciones y “sacar el promedio” sólo porque aparentemente eso es lo correcto.

### 3—11 EFECTO DEL TAMAÑO DE LA MUESTRA

En cualquier proceso de muestreo, sin duda alguna, cuanto más grande sea la muestra, tanto más precisas serán nuestras afirmaciones finales. Aunque la precisión de un valor medio aumenta sólo en proporción directa a la raíz cuadrada del número de observaciones de la muestra (ecuación 3-5), de todos modos se incrementa, y las muestras más grandes tienen medias más precisas. Puede haber, no obstante, restricciones de tiempo u oportunidad, y no siempre podemos obtener muestras del tamaño deseable. En general, deberá procurarse un acomodo entre las conflictivas exigencias de precisión y de tiempo, y un buen diseño experimental habrá de tener en cuenta este arreglo en la planeación preliminar. Sin embargo, en ocasiones puede ser necesario el contentarnos con muestras pequeñas. Frente a esta indeseable eventualidad, debemos

estar conscientes de la magnitud de pérdida resultante en precisión. Se da, en primer lugar, la influencia sobre el valor de la desviación estándar de la media; cuanto más pequeña sea  $N$ , tanto mayor será el valor de  $S_m$  y más amplio el intervalo en la escala de  $x$  que tiene el 68% de probabilidad de contener el valor  $X$  del universo. En segundo lugar, para muestras pequeñas debemos tener una fe decreciente en el uso de la desviación estándar de la muestra,  $S$ , como mejor estimación del valor  $\sigma$  del universo. Para ilustrar esto, recordemos la curva de distribución para la desviación estándar de la muestra que aparece en la figura 3-6. Aquí cabe preguntarse: dada la existencia de esta distribución, ¿cuán buena es nuestra “mejor estimación” de la desviación estándar del universo, y cómo varía ésta con el tamaño de la muestra? La respuesta ha de basarse en la amplitud de la distribución de las desviaciones estándar de las muestras, y por tanto debemos calcular la desviación estándar de esta distribución. Esto se denomina la **desviación estándar de la desviación estándar**. (Obviamente este proceso, se comprende, podría aplicarse indefinidamente, pero, por fortuna, debemos detenernos en esta etapa.) El valor de la desviación estándar de la desviación estándar, calculada matemáticamente a partir de la ecuación de la distribución Gaussiana, es

$$\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{2(N-1)}} \quad (3-8)$$

De esta manera, la amplitud de la distribución de desviaciones estándar de la muestra está relacionada con su valor central  $\sigma$  por el factor numérico  $1/\sqrt{2(N-1)}$ . Como cabría esperar, la exactitud de la desviación estándar de la muestra como mejor estimación del valor del universo depende del tamaño de la muestra. Por ejemplo, con un tamaño de 10, la ecuación 3-8 revela que nuestro valor  $S$  para la muestra tiene un 68% de probabilidad de estar incluido en un rango de  $\pm \sigma/\sqrt{18}$ , aproximadamente a  $\pm \sigma/4$ , del valor  $\sigma$  del universo. En correspondencia, el intervalo que tiene un 95% de probabilidad de contener la media de la muestra tiene una amplitud de  $\sigma/2$  respecto del valor  $\sigma$  del universo. Esto no representa una alta precisión en la medición. Vemos, por tanto, confirmada la advertencia dada con anterioridad: los cálculos estadísticos con muestras pequeñas deberán intentarse sólo cuando no exista otra alternativa. A fin de proporcionar una apreciación global de la confiabilidad de las estimaciones de  $\sigma$  a partir de muestras de tamaño diferente, la tabla 3-1 contiene algunos valores representativos de  $\sqrt{2(N-1)}$  para valores diversos de  $N$ .

Esos valores se ilustran en la figura 3-7 para  $N = 3$ ,  $N = 10$  y  $N = 100$ . Los límites de  $\pm \sigma/S$  se han considerado en estas curvas, las cuales ilustran, para varios tamaños de muestras, los intervalos en los que hay una probabilidad del 68% de que se encuentre la desviación estándar de nuestra muestra. Para valores de  $N$  menores de alrededor de 10, es evidente que los intervalos para probabilidades del 68 o del 95% se vuelven tan grandes en comparación con el valor central que casi no

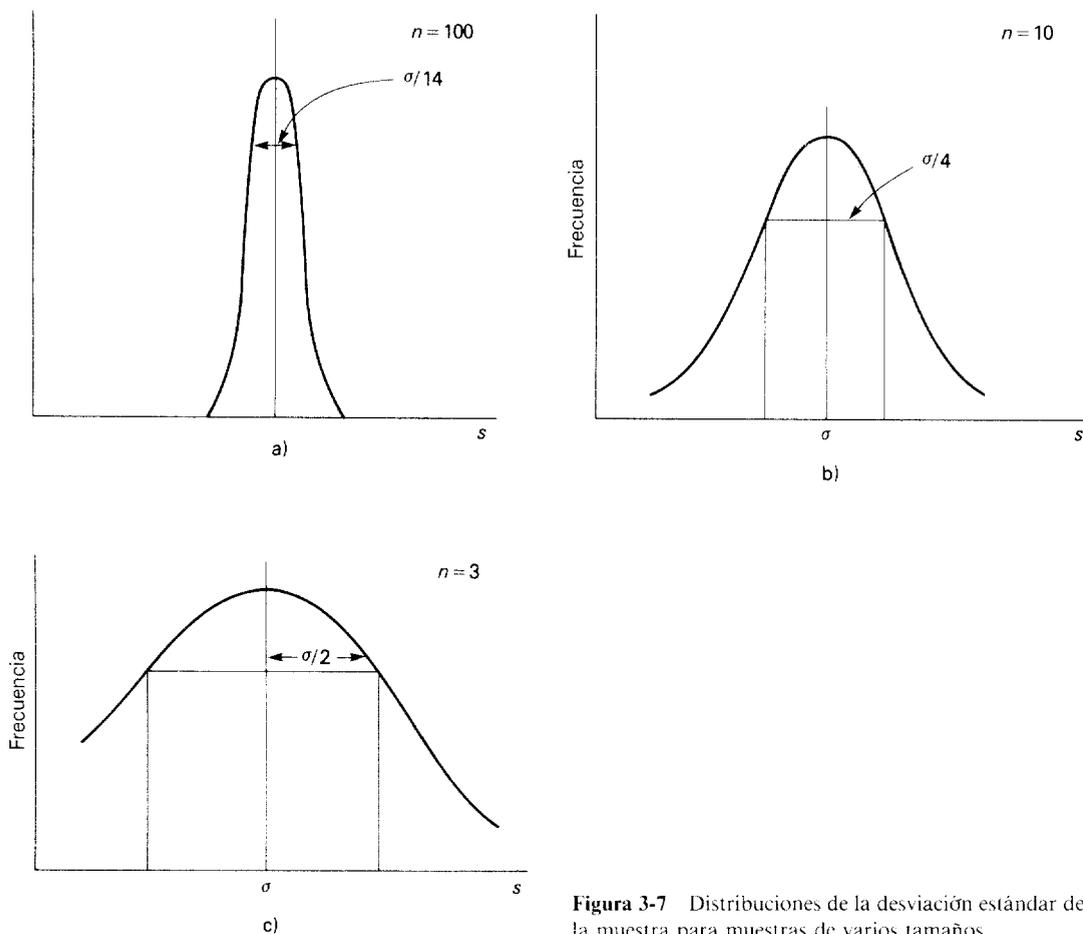
**TABLA 3-1** Exactitud de las estimaciones de  $\sigma$  a partir de muestras de tamaño variable

68% de confianza		95% de confianza	
$N$	$\sqrt{2(N-1)}$	$N$	$\frac{1}{2} \sqrt{2(N-1)}$
2	1.4	2	0.7
3	2.0	3	1.0
4	2.4	4	1.2
5	2.8	5	1.4
6	3.1	6	1.6
7	3.4	7	1.7
8	3.7	8	1.8
9	4.0	9	2.0
10	4.2	10	2.1
15	5.2	15	2.6
20	6.1	20	3.2
50	9.8	50	4.9
100	14.1	100	7.0

tiene sentido intentar una estimación de  $\sigma$ . Rara vez, pues, vale la pena intentar cualquier clase de análisis estadístico con muestras que tengan menos de 10 observaciones. En todo caso, al presentar resultados de análisis estadístico, es esencial señalar el tamaño de la muestra. Si queremos que nuestros valores para la media y la desviación estándar de la media sean interpretados según la regla del 68 y el 95%, debemos proporcionar a nuestros lectores la oportunidad de juzgar la exactitud de nuestras estimaciones.

### 3-12 DESVIACION ESTANDAR DE VALORES CALCULADOS

En el capítulo 2 consideramos la incertidumbre de valores calculados de  $z$ , y supusimos que la incertidumbre de las observaciones originales establecía intervalos dentro de los cuales estábamos casi seguros de que se encontraban los valores buscados. Partiendo de la hipótesis pesimista de que los errores en los diversos parámetros observados se combinaban del "peor modo", calculamos el máximo rango de variación del valor calculado a fin de llevar éste tan lejos del valor central como fuese posible. Ya hemos sugerido antes que esto representa un enfoque poco práctico y pesimista, y que un parámetro más útil sería un valor "probable" para  $\delta z$ , basado en las diferentes probabilidades asociadas con la desviación de los parámetros originales  $x$ ,  $y$ , etc., de sus valores centrales. Los límites dados por este parámetro serán, naturalmente, menores que  $\pm \delta z$ , pero esperamos que éstos tengan una importancia cuantitativa real. Esta validez estadística podrá darse sólo si las incertidumbres en  $x$  y en  $y$  son



**Figura 3-7** Distribuciones de la desviación estándar de la muestra para muestras de varios tamaños.

estadísticamente significativas, y en los cálculos que siguen supondremos que las mediciones de  $x$  y de  $y$  han sido lo bastante numerosas para justificar un cálculo de las desviaciones estándar  $S_x$  y  $S_y$ . Esperamos ahora calcular un valor de  $S_z$  que revista la misma importancia para los valores de  $z$  que la que  $S_x$  y  $S_y$  tienen para  $x$  y  $y$ .

Debemos, con todo, preguntarnos para empezar qué queremos decir con  $S_z$ . Suponemos que la medición se da en parejas de observaciones  $x$ ,  $y$  obtenidas por repetición del proceso de observación bajo condiciones idénticas (por ejemplo, la corriente que pasa por un resistor y el voltaje entre sus extremos, medidos con la intención de calcular la resistencia  $R$ ). Cada pareja de observaciones proporcionará un valor de  $z$ , y, si la repetición da  $N$  pares, tendremos

un conjunto de  $N$  valores de  $z$  que están distribuidos de acuerdo con las fluctuaciones en las mediciones originales. La cantidad que requerimos,  $S_z$ , es la desviación estándar de ese conjunto de valores de  $z$ . Estos valores individuales de  $z$  acaso nunca se calculen uno por uno, pues hay una forma más fácil de hacerlo. Podemos calcular las medias  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  de los conjuntos de valores de  $x$  y  $y$ , y obtener  $\bar{z}$  en forma directa valiéndonos de la premisa (válida si  $S_x$ ,  $S_y$  y  $S_z$  son pequeñas comparadas con  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , respectivamente), de que

$$\bar{z} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Sin embargo, esta distribución de los valores de  $z$  nos da la importancia de la desviación  $S_z$  que estamos a punto de calcular.

Si suponemos que los universos de los valores de  $x$ ,  $y$  y  $z$  tienen una distribución Gaussiana, el parámetro  $\sigma_z$  (del cual nos disponemos a calcular la mejor estimación en términos de distintos valores de  $S_z$ ) tendrá la importancia usual; esto es, cualquier valor de  $z$  tendrá una probabilidad del 68% de estar incluido a  $\pm \sigma_z$  del valor central. Como antes, sea

$$z = f(x, y)$$

y consideremos variaciones  $\delta x$  y  $\delta y$  que producen a su vez una variación  $\delta z$  en el valor calculado de  $z$ . El valor de  $\delta z$  estará dado por

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y$$

Esta variación puede emplearse para calcular la desviación estándar de los  $N$  valores diferentes de  $z$ , ya que

$$S_z = \sqrt{\frac{\sum (\delta z)^2}{N}}$$

Así

$$\begin{aligned} S_z^2 &= \frac{1}{N} \sum \left( \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum \left( \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 (\delta x)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \delta x \delta y \right) \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{N} \sum (\delta x)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{N} \sum (\delta y)^2 + \frac{2}{N} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \delta x \delta y \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{N} \sum (\delta x)^2 = S_x^2 \quad \text{y} \quad \frac{1}{N} \sum (\delta y)^2 = S_y^2$$

y, como para los fines presentes puede considerarse que  $\delta x$  y  $\delta y$  son variaciones independientes,

$$\sum (\delta x \delta y) = 0$$

Por esto, finalmente

$$S_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 S_y^2} \quad (3-9)$$

Si  $z$  es una función de más de dos variables, la ecuación se extiende agregando términos semejantes. De este modo, si las componentes de un cálculo tienen desviaciones estándar con cierto grado de confiabilidad, puede hallarse un valor para la incertidumbre probable del resultado, donde "probable" tiene verdadera importancia cuantitativa.

El cálculo se ha realizado en términos de la varianza o desviación estándar de las distribuciones de  $x$  y  $y$ . Sin embargo, en la práctica real, no se emplea la varianza de la muestra directamente; es preciso calcular las mejores estimaciones de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , etc., y, de acuerdo con la ecuación 3-6, utilizar el valor modificado de la desviación estándar con denominador  $N - 1$  en vez de  $N$ . El resultado final constituirá entonces una mejor estimación de  $\sigma_z$ . La desviación estándar de la media de  $z$  puede calcularse luego directamente usando la ecuación 3-5, lo cual proporcionará los límites que tienen un 68% de probabilidad de contener el valor fijo buscado.

Nótese que la mayoría de los experimentos no se llevan a cabo de acuerdo con las suposiciones restringidas del desarrollo anterior. Si, por ejemplo, estamos estudiando la rapidez de flujo de agua por un tubo, mediríamos la rapidez de flujo, el radio del tubo, y la longitud de éste por separado, y decidiríamos luego la cantidad de observaciones en cada muestra con base en la precisión intrínseca de la medición del caso. No podemos, por tanto, usar la ecuación 3-9 directamente, ya que las diferentes desviaciones estándar  $S$ 's no son compatibles. La solución estriba en calcular primero la desviación estándar de la media para cada uno de los parámetros originales. Si éstas se usan en la ecuación 3-9, el cálculo nos dará inmediatamente una desviación estándar de la media de  $z$ .

### 3—13 DESVIACION ESTANDAR DE VALORES CALCULADOS: CASOS ESPECIALES

Vamos ahora a aplicar la ecuación 3-9 a unos cuantos ejemplos comunes. En todos los casos que siguen, se da por sentado que las diferentes desviaciones es-

tándar  $S$ 's son las mejores estimaciones del valor  $\sigma$  correspondiente al universo.

a) Suma de dos variables

$$z = x + y$$

Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

y

$$S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

Adviértase que este resultado justifica la ecuación 3-7; el valor medio de una muestra,  $(\Sigma x_i)/N$ , es precisamente una función del tipo  $z = x + y$ , en donde  $x$  y  $y$  resultan ser mediciones independientes del mismo parámetro. De este modo, si

$$z = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + x_3 + \dots)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 1/N \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = 1/N \quad \text{etc.}$$

y

$$\begin{aligned} S_z &= \sqrt{\left(\frac{1}{N}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^2 S_x^2 + \dots} \\ &= \sqrt{NS_x^2/N^2} = S_x/\sqrt{N} \end{aligned}$$

b) Diferencia de dos variables

$$z = x - y$$

Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1$$

pero, nuevamente

$$S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

Recordando la sección 2-8b, puede observarse que ese análisis sobre la medición de diferencias sigue siendo válido.

c) Producto de dos variables

$$z = xy$$

Aquí

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

y

$$S_z = \sqrt{y^2 S_x^2 + x^2 S_y^2}$$

El valor específico de  $S_z$  con los valores particulares  $x_0$  y  $y_0$ , de  $x$  y  $y$ , puede obtenerse sustituyendo  $x_0$  y  $y_0$  en las ecuaciones. Como era el caso para la incertidumbre de los productos, la ecuación se expresa más claramente en términos de valores relativos de  $S$ , y obtenemos que

$$\frac{S_z}{z} = \sqrt{\frac{S_x^2}{x^2} + \frac{S_y^2}{y^2}}$$

d) Variables elevadas a potencias

Aquí

$$z = x^a$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ax^{a-1}$$

y

$$S_z = \sqrt{a^2 x^{2(a-1)} S_x^2}$$

De nueva cuenta, esto resulta más instructivo cuando se expresa en términos de valores relativos:

$$\begin{aligned} \frac{S_z}{z} &= \sqrt{\frac{a^2 S_x^2}{x^2}} \\ &= a \frac{S_x}{x} \end{aligned}$$

e) El caso general de potencias y productos

$$z = x^a y^b$$

Los resultados de las dos secciones precedentes pueden, desde luego, ampliarse para dar:

$$\frac{S_z}{z} = \sqrt{\left(\frac{aS_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{bS_y}{y}\right)^2}$$

En contraste con el caso de las incertidumbres combinadas, no hace falta conceder especial importancia a las potencias negativas de la función original; en la ecuación para  $S_z$ , las potencias ocurren en forma cuadrática y automáticamente producen un resultado positivo.

Si se encuentra una función distinta a las ya señaladas, el empleo de la ecuación 3-9 dará el resultado deseado. Cabe señalar, por cierto, que para una función de una sola variable la ecuación 3-9 se reduce a la misma forma del caso de las incertidumbres, es decir la ecuación 2-1. Esta correspondencia es predecible para una situación en la que no tenemos la interacción de probabilidad entre dos o más variables.

Por último, aunque en las secciones 2-5 a 2-9 presentamos un buen número de enfoques diferentes para el cálculo de límites externos de incertidumbres, la desviación estándar de  $z$  es una cantidad definida en forma exclusiva, y no hay alternativas al empleo de la ecuación 3-9.

### 3-14 COMBINACION DE DISTINTOS TIPOS DE INCERTIDUMBRE

Para desgracia de la elegancia matemática en los cálculos, a menudo requerimos definir la incertidumbre en un resultado que incluye parámetros con diferentes tipos de incertidumbre. Podemos, por ejemplo, necesitar la incertidumbre en

$$z = f(x, y)$$

donde,  $x$  es una cantidad a la cual se le han asignado límites exteriores  $\pm \delta x$ , dentro de los cuales estamos "casi seguros" de que se encuentra su valor real, en tanto que  $y$  es una cantidad cuya incertidumbre es de naturaleza estadística; tal vez se trate de una desviación estándar  $S_y$  de la muestra, o de una desviación estándar  $S_y/\sqrt{N}$ , de la media. Y necesitamos determinar un índice de incertidumbre

para  $z$ . Nuestra primera dificultad es definir siquiera la incertidumbre en  $z$ . Estamos tratando de combinar dos parámetros que tienen, en efecto, curvas de distribución completamente diferentes. Una es la función normal de Gauss; la otra es un rectángulo, limitado por los valores  $x_0 + \delta x$  y  $x_0 - \delta x$ , y plano en la parte superior, pues el valor real de  $x$  puede, por igual, darse en cualquier punto dentro del intervalo  $x_0 \pm \delta x$ . Cualquier método general para resolver este problema probablemente resulte demasiado complejo para el uso común, pero disponemos ya de una aproximación sencilla basada en el procedimiento que sigue.

En el cálculo de  $z$  utilizamos la media de la muestra,  $\bar{y}$ , para el valor de  $y$ , lo que implica que la media del universo considerado tiene una probabilidad de aproximadamente  $\frac{2}{3}$  de estar incluido en el intervalo  $\bar{y} \pm S_y/\sqrt{N}$ . Calculemos, pues, límites de  $x$  que también tengan una probabilidad de  $\frac{2}{3}$  de encerrar el valor real. Como la distribución de probabilidad de  $x$  es rectangular,  $\frac{2}{3}$  del área bajo la curva de distribución están encerrados por límites separados por una distancia igual a  $\frac{2}{3}$  del rango total de posibilidades, esto es,  $\frac{2}{3}$  de  $2 \delta x$ . La amplitud total del espacio con probabilidad de  $\frac{2}{3}$  es, por tanto, de  $\frac{4}{3}$  de  $\delta x$ , y los límites de incertidumbre son de  $\pm \frac{2}{3} \delta x$ .

La cantidad  $\frac{2}{3} \delta x$  es, por lo tanto, compatible con  $S_y/\sqrt{N}$ , puesto que ambos se refieren a una probabilidad de  $\frac{2}{3}$ . Puede usarse ahora la ecuación 3-9, introduciendo  $\frac{2}{3} \delta x$  para el valor de la desviación estándar de la media de  $x$ , y  $S_y/\sqrt{N}$  para la función de  $y$ . Esto dará un valor de incertidumbre para  $z$  que puede interpretarse de acuerdo con la regla de los  $\frac{2}{3}$ . Nótese, empero, que los límites para el 95% de probabilidad no son simplemente el doble de amplios que para la probabilidad de  $\frac{2}{3}$ ; habría que calcular éstos por separado utilizando el método anterior.

### 3-15 RECHAZO DE RESULTADOS

Una última propiedad práctica de las curvas de distribución tiene que ver con los valores que quedan fuera. Siempre existe la posibilidad de cometer una equivocación, tal vez al leer equivocadamente una escala o al mover accidentalmente un instrumento entre el ajuste y la observación. Nos veremos, por tanto, en la tentación de justificar de modo parecido una observación en particular que diverja claramente de lo que de otra forma sería un grupo compacto de valores. Esta, sin embargo, es una tentación peligrosa, ya que la curva de Gauss permite la existencia de valores divergentes de la parte central de la distribución. Más aún, una vez que admitamos la posibilidad de "depurar" las observaciones, puede resultar muy difícil saber dónde detenerse. Dependemos, pues, del juicio del experimentador. Esto no es precisamente irracional, puesto

que el experimentador sabe más de la medición que cualquier otra persona, ya que puede disponer de criterios para tomar decisiones que pueden ser muy útiles. Con el tiempo, se han formulado muchas “reglas” empíricas para el rechazo de observaciones, pero éstas deben utilizarse con prudencia. Sería ridículo, por ejemplo, aplicar una regla para rechazar un resultado que estuviera apenas fuera del límite que fija la regla si hay, además, otras observaciones justo dentro del límite. Hay también la posibilidad de que se haya registrado información adicional relativa al resultado aislado en el momento mismo en que se verificó, y eso puede ayudarnos a decidir considerarlo o rechazarlo.

El consejo que deseamos al tomar este tipo de decisiones puede encontrarse en las propiedades de la distribución Gaussiana. En una distribución Gaussiana la probabilidad de obtener resultados fuera de los límites de  $2\sigma$  es del 5% (como ya se vio); más allá de los límites de  $3\sigma$ , es de  $\frac{1}{3}\%$ , y fuera de los límites de  $4\sigma$  la probabilidad, es menor de  $6 \times 10^{-5}$ . La decisión de rechazar resultados sigue siendo responsabilidad del experimentador, por supuesto, pero podemos afirmar, en términos generales, que los resultados incluidos más allá de los límites de  $3\sigma$  muy probablemente sean equivocaciones, y quedarán, por tanto, descartados al cabo. Sin embargo, puede surgir un problema a causa de nuestra falta de información acerca del universo de observaciones y sus parámetros  $X$  y  $\sigma$ . Cuanto mejor sea nuestro conocimiento de  $\sigma$ , más seguros podremos estar de que cualquier observación muy divergente y aislada proviene de una causa verdaderamente accidental, tal como un error humano, mal funcionamiento de los aparatos, etc. Así, por ejemplo, si hemos efectuado 50 observaciones que se agrupan dentro del 1% del valor central y obtenemos luego un resultado que se ubica a una distancia del 10% relativo, podemos estar razonablemente seguros para sugerir que esta última observación no pertenece al mismo universo que las 50 precedentes. El requisito básico, antes de justificar cualquier rechazo, es confiar en la distribución principal de las observaciones del caso. Sin duda alguna, no hay justificación para aceptar dos resultados y rechazar luego una tercera medición sobre la base de un criterio de  $3\sigma$ . A menos que el argumento del rechazo sea plenamente convincente, la mejor opción es considerar todas las observaciones, nos gusten o no.

También es sensato recordar que muchos de los principales descubrimientos de la física tuvieron su origen en observaciones que diferían de lo esperado.

## PROBLEMAS

Las siguientes observaciones referentes a ángulos (dadas en minutos de arco), se efectuaron al medir el espesor de una película de helio líquido. Suponga que las observa-

ciones reflejan incertidumbre al azar, y que son una muestra de un universo de Gauss. Aplíquelas en seguida en los problemas 1-14.

34	35	45	40	46
38	47	36	38	34
33	36	43	43	37
38	32	38	40	33
38	40	48	39	32
36	40	40	36	34

- Dibuje el histograma de las observaciones.
- Identifique la moda y la mediana.
- Calcule la media.
- Calcule la mejor estimación de la desviación estándar del universo.
- Calcule la desviación estándar de la media.
- Calcule la desviación estándar de la desviación estándar.
- ¿Dentro de qué límites hay una probabilidad del 68% de que esté incluida una observación particular?
  - ¿Qué límites dan una probabilidad del 95%?
- ¿Dentro de qué límites la media tiene **a)** una probabilidad del 68%, y **b)** una probabilidad del 95% de estar incluida?
- ¿Dentro de qué límites la desviación estándar de la muestra tiene **a)** una probabilidad del 68%, y **b)** una probabilidad del 95% de estar incluida?
- Calcule el valor de la constante  $h$  en la ecuación de la distribución Gaussiana.
- Si hubiéramos obtenido una observación individual de 55 en el conjunto, ¿se decidiría por aceptarla o por rechazarla?
- Tome dos muestras escogidas al azar, de cinco observaciones cada una, del conjunto principal de observaciones. Calcule las medias y desviaciones estándar de las muestras para ver cómo se relacionan entre sí y con los valores más precisos obtenidos del grupo total.
- Si el experimento requiere que la desviación estándar de la media no sobrepase el 1% del valor de la media, ¿cuántas observaciones se requiere hacer?
- Si la desviación estándar de la distribución del universo ha de definirse dentro del 5%, ¿cuántas observaciones deberán efectuarse?
- Una serie de mediciones consecutivas del diámetro del corte transversal circular de un alambre, dio por resultado una media de .62 mm con una desviación estándar de la muestra de .04 mm. ¿Cuál es la desviación estándar del valor calculado para el área de corte transversal?
- Al medir la longitud de onda de las dos líneas amarillas del espectro del sodio, éstas resultan de  $589.11 \times 10^{-9}$  m y  $589.68 \times 10^{-9}$  m, respectivamente, cada una con desviación estándar de  $.15 \times 10^{-9}$  m. ¿Cuál es la desviación estándar para la diferencia calculada de longitud de onda entre las dos líneas?

17. Se usa un péndulo simple para medir  $g$  usando  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ . Veinte mediciones de  $T$  dan una media de 1.82 seg y una desviación estándar de la muestra de .06 seg. Diez mediciones de  $l$  dan una media de .823 m y una desviación estándar de la muestra de .014 m. ¿Cuál es la desviación estándar de la media para el valor calculado de  $g$ ?

# 4

## Pensamiento científico y experimentación

### 4—1 OBSERVACIONES Y MODELOS

En este capítulo examinaremos brevemente la naturaleza de la actividad científica, con la esperanza de que se vea cómo los diferentes tipos de experimentación surgen en forma natural de los problemas que se encaran en diversas circunstancias experimentales. Para comprender mejor la naturaleza del pensamiento científico, es útil volver a los fundamentos y simular que estamos creando un nuevo campo de investigación científica desde el principio.

#### a) Identificación de las variables significativas

Al encontrar, a través de la observación, un fenómeno totalmente nuevo, nuestra primera pregunta natural es: ¿qué causa esto? Esta fue la interrogante que se hizo con respecto a la difracción de la luz, la radiactividad, la superconductividad, las pulsaciones, y casi con todos los fenómenos físicos. Es la misma pregunta que se sigue haciendo con relación a la naturaleza de las partículas elementales, los cambios climáticos, el cáncer y, por supuesto, muchos otros temas. Plantear preguntas sobre las causas originales, empero, puede conducirnos a dificultades filosóficas, y es mejor reconocer que nuestras preguntas naturales sobre las “explicaciones” de los fenómenos físicos en realidad se refieren a las relaciones entre las variables observadas. Normalmente, la primera fase de investigación sobre un fenómeno nunca antes estudiado consiste en una búsqueda de las variables que parecen estar relacionadas. Mediante la identifi-

cación de estas variables significativas, reducimos el campo de investigación a niveles prácticos y facilitamos el trabajo sistemático tanto a nivel experimental como teórico. Por ejemplo, un punto de partida válido para una teoría de la evolución biológica puede ser una proposición sobre observaciones relacionadas como ésta: los tipos de fósiles están relacionados con la edad de las rocas en que se hallan.

Es interesante notar que, en esta etapa inicial del quehacer científico, podemos plantear proposiciones relativamente definidas porque estamos considerando observaciones reales. Esto explica la reputación de que las actividades científicas conducen a la “verdad científica” sobre el universo. Tal proposición, sin embargo, debe restringirse a la etapa inicial del diagnóstico, en la cual identificamos las variables significativas del caso. A esta etapa le siguen otras, en las que nos ocupamos de un tipo de actividades totalmente diferentes.

#### b) Concepto del modelo

Una vez que hemos analizado nuestro fenómeno nuevo y estemos conscientes de las variables significativas, podemos pasar al siguiente nivel de complejidad. Para ilustrar esta etapa, consideremos un ejemplo elemental: supongamos que vamos a pintar una pared y queremos saber cuánta pintura habrá que comprar. Debemos conocer el área de la pared, así que, ¿qué podemos hacer? Nuestra reacción natural sería medir la longitud de la pared y su altura, y luego multiplicar estas cantidades. Pero, ¿esto qué nos daría? Además, ¿qué nos hace creer que el producto resultante tiene algo que ver con la pared? Cuando multiplicamos estos dos números, efectivamente obtenemos algo: el área del rectángulo del todo imaginario definido por esas dos dimensiones. Esto puede guardar o no alguna relación con el área de la pared. Lo importante es darse cuenta de que estamos tratando con dos categorías completamente diferentes. Primera: está la pared real cuya área deseamos conocer. Segunda: está el rectángulo conceptual, por completo inventado, construido a partir de definiciones, existente sólo en nuestra imaginación, y, que en este caso, se especifica con las dos longitudes medidas. Por lo general no somos conscientes de esta distinción tan importante, porque todos estamos tan familiarizados con el concepto de los rectángulos que una simple casi inconsciente mirada a la pared nos da la seguridad de que un rectángulo es una representación satisfactoria de ella.

Pero supongamos que no fuésemos capaces de discernir de este modo, y que estamos ciegos y no hemos hecho más que medir la base y un lado de la pared, sin pensar en los ángulos o cualquier otra propiedad de la misma. Podríamos multiplicar nuestras dos dimensiones para obtener un área que no tuviera relación alguna con una pared cuya forma resultara ser la de un paralelogra-

mo. Para evitar incurrir en este tipo de error, como experimentadores ciegos tendríamos que recordar que el proceso de multiplicación nos da el área de un rectángulo meramente hipotético, y que esa área resultará significativa para la pared sólo en la medida en que la construcción hipotética esté en correspondencia con la pared real. Para verificar esa correspondencia, tendríamos que conocer las diversas propiedades de los rectángulos, y comparar tantas de esas propiedades con la pared real como fuese posible. Tendríamos que probar con propiedades como rectitud de los lados, esquinas en ángulo recto, igualdad de las diagonales, etc. Sólo después de haber comparado una cantidad suficiente de propiedades entre la construcción rectangular y la pared real, y de encontrar que se corresponden en forma adecuada, podremos confiar en que el área del rectángulo imaginario es una aproximación suficientemente buena con respecto al área real de la pared en cuestión.

Ya hemos identificado una distinción muy importante: por una parte, tenemos el mundo real y nuestras percepciones de él; por la otra, las construcciones hipotéticas, imaginarias, creadas a partir de conjuntos de definiciones. Una construcción de éstas se denomina a menudo **modelo** de la situación, y el uso de los modelos es casi universal en nuestro pensamiento, sea éste científico o no. El pintor tiene en mente un rectángulo imaginario cuando se propone pintar la pared. Además de la flor real en su mano, el botánico está consciente del concepto de esa especie, definida por una lista común de propiedades. El economista que estudia la economía de un país desarrolla un conjunto de definiciones y ecuaciones cuyas propiedades él espera que sean semejantes a aquellas verdaderas de la economía real. Los modelos nos proporcionan un marco de referencia para el pensamiento y la comunicación, una descripción esquemática de los sistemas, una base para el cálculo, una guía para el estudio futuro, y muchas otras ventajas.

Los modelos son de muchos tipos diferentes, pero tienen una característica en común: son conceptos inventados. Se construyen con la intención de que correspondan tan exactamente como sea posible con el mundo real, mas ningún modelo puede ser jamás una réplica exacta de su contraparte real. Pertenecen a diferentes categorías: una pared no puede *ser* realmente un rectángulo, ni una rueda un círculo. Sin embargo, las propiedades de un modelo pueden ser semejantes a las del mundo real, y, en términos generales, un modelo resulta útil en la medida en que sus propiedades sí corresponden con las del mundo real.

### c) Comparación entre los modelos y el mundo real

Al emprender un experimento científico normalmente no estamos conscientes de la medida en que las propiedades de nuestro modelo y las de su contraparte en el mundo real se corresponden, y es necesario, como fundamento para todo

trabajo posterior, empezar probando el modelo contra el sistema real. Sólo si se demuestra experimentalmente que las propiedades del modelo guardan una correspondencia adecuada con las del sistema real tendremos razón, como el pintor que se dispone a solicitar la pintura, para dar el siguiente paso.

De paso, debemos advertir que, para que sea útil desde el punto de vista científico, un modelo o concepto debe ser efectivamente verificable mediante la observación. De este modo, una proposición relacionada con el número de ángeles que pueden danzar sobre la cabeza de un alfiler no puede merecer el calificativo de científica. Esto no quiere decir que las únicas ideas útiles son las que podemos verificar con la experiencia; sólo que hay proposiciones que pertenecen a campos ajenos a la ciencia. Esas otras proposiciones podrán ser perfectamente válidas, tal vez como enunciados matemáticos o filosóficos, o como juicios éticos o estéticos.

#### d) Refinamiento de los modelos

En general, una situación experimental incluirá, primero, al sistema mismo y, segundo, a un modelo o modelos del sistema. Sin importar qué otro factor esté comprendido, será una parte esencial de la tarea del experimentador el comprobar las propiedades del modelo en comparación con las propiedades del sistema real. Inevitablemente, en principio, nuestro modelo será incompleto e inexacto. Por ejemplo: retomemos el caso del pintor y la pared. Si el pintor verifica, con precisión cada vez mayor, las propiedades de los rectángulos en comparación con las de la pared, casi con certeza llegará a un punto en el que comenzará a encontrar discrepancias. En ese momento, podrá modificar su modelo: un ángulo aquí, una longitud allá, etc., para hacerlo más correspondiente con la pared real, y el área calculada constituirá una estimación cada vez más exacta del área real de la pared. Sin embargo, aun con estos ajustes el modelo sigue siendo un concepto inventado, y el área calculada con base en él pertenece al modelo.

En el trabajo científico, en general, debemos sentirnos en libertad de modificar o cambiar nuestros modelos en el momento en que sea necesario. Para empezar, el modelo es una construcción nuestra, y se trata sólo de una idea presente en nuestras mentes. Al proponernos efectuar un cambio, por tanto, nuestra única consideración será la utilidad básica de la idea, y el mayor provecho que aporte si se modifica de alguna forma. Puesto que probablemente es imposible construir una descripción verbal o matemática de un fragmento de la realidad natural que sea un equivalente exacto y completo de éste, es preciso aceptar que un proceso de refinamiento continuo y de eventual reemplazo de los modelos, forma parte natural del acontecer científico. Y es asunto propio normal de los científicos, ya sean “puros”, aplicados o sociales, el aplicar el

proceso de comparar modelos y sistemas en una búsqueda continua del mejoramiento de los modelos. Por lo general, esto no es un proceso fácil, pues los modelos que tenemos ahora son tan buenos como las generaciones de científicos han sido capaces de hacerlos a lo largo de la historia.

Por otra parte, no hace falta preocuparnos enteramente por el mejoramiento de los modelos. Aunque ningún modelo pueda ser el equivalente exacto de la situación real, con frecuencia las propiedades de nuestros modelos y sistemas se corresponden suficientemente bien para nuestros propósitos. Si es así, no es necesario preocuparnos por las fallas subyacentes. Podemos proceder confiados a efectuar nuestra tarea particular, siempre que recordemos volver a verificar periódicamente la situación que nos ocupa, y confirmar la adecuación continua del modelo.

#### e) La construcción de modelos en la historia de la ciencia

Con el bosquejo anterior, es posible que uno tenga la impresión de que en el desarrollo científico hay cierto tipo de secuencia única que va de la observación a la generalización y de ésta al modelo. De hecho, el pensamiento científico con mucha frecuencia evolucionó de esa manera. Sin embargo, la secuencia no es invariable. Hay muchos ejemplos de una idea básica inventada, que constituye el fundamento de un modelo, que fue fruto de la especulación pura de su creador, sin que el mismo estuviera consciente de las observaciones que podían asociarse directamente con su conjetura. Cabe recordar, por ejemplo, la especulación de De Broglie sobre el modelo ondulatorio de la materia, que se publicó en 1924 antes de que ninguno de los fenómenos pertinentes fuese observado en forma directa, o la invención de Fermi del concepto del neutrino casi cuarenta años antes de su observación directa. No hay un proceso único de investigación científica, un "método científico" exclusivo. Las ideas y las observaciones tienden a entremezclarse de un modo u otro en su avance, sin una preeminencia automática de una sobre las demás. Con todo, independientemente del orden preciso que siga una investigación, hay un aspecto que permanece invariable: la actividad fundamental de la experimentación científica consiste en comparar las propiedades de los modelos con las propiedades correspondientes del mundo real.

No hemos examinado en absoluto los procesos mediante los cuales se introducen nuevas ideas como base de teorías totalmente nuevas. Es relativamente fácil comprender cómo una idea existente puede sufrir un proceso de refinamiento continuo y adquirir una correspondencia cada vez más estrecha con la observación pertinente, sin que haya modificación alguna de los conceptos fundamentales de la teoría en cuestión. (Consideremos, por ejemplo, la teoría de Ptolomeo sobre los epiciclos planetarios.) Por otra parte, una teoría

como la de la relatividad general de Einstein, o la mecánica ondulatoria de Schroedinger, pueden proponerse solamente después de realizar una revisión completamente radical de los conceptos y modos de pensar básicos. Una revisión así no es fácil, en parte porque nuestras ideas actuales tienden a conformar los procesos de observación de tal manera que se induce la concordancia entre el concepto y la observación. Un concepto, definición o principio por largo tiempo establecido, por su misma familiaridad, a menudo restringe nuestra visión de modo que sólo vemos lo que estamos condicionados a ver. Esto puede dificultarnos advertir la discrepancia, tal vez pequeña pero decisiva, que puede originar una revisión radical del pensamiento al respecto. La manera en que estas grandes revoluciones del pensamiento científico han ocurrido, se describen en los libros de Kuhn, Cohen, y Harré señalados en la Bibliografía.

Podría pensarse que, después de esas grandes revoluciones, un modelo o teoría superados serían descartados inmediatamente para hacer lugar al sustituto. De hecho, muchos modelos o teorías no han gozado de utilidad duradera: hoy día no se oye mucho acerca del flogisto, o de los “elementos” tierra, fuego, aire y agua; pero éste no es siempre el caso. Muy a menudo un modelo superado tiene una correspondencia tan aceptablemente buena con el sistema que, por lo común y en atención a la sencillez, puede seguir siendo muy útil, toda vez que no esperemos obtener la mayor precisión que es posible lograr, lo sería sólo si utilizáramos un modelo de mayor generalidad.

#### f) Comparación detallada entre modelos y sistemas

Resumiendo nuestro análisis hasta ahora, tenemos cuatro componentes en el esquema de investigación científica: 1) la observación, 2) una idea construida en nuestra imaginación, 3) el proceso de comparar las propiedades de la idea con el mundo real, y 4) la posibilidad de modificar progresivamente la idea para mejorar la concordancia entre el modelo y el sistema. Nos ocuparemos ahora de los procedimientos reales con los que podemos comparar las propiedades de modelos y sistemas. A este efecto no bastará tener un concepto gráfico, un tanto vago, de la situación: para proporcionar una base adecuada de comparación debemos ser tan explícitos como sea posible. Por lo común, esto requerirá llevar a cabo una observación cuantitativa del sistema y emplear procedimientos matemáticos para especificar el modelo. Veamos en seguida algunos ejemplos específicos y analicemos los distintos niveles de complejidad en la construcción de modelos.

Consideremos una banda elástica colgada de su extremo superior, y de cuyo extremo inferior podemos colgar pesos. La forma más rudimentaria de ideación respecto a las propiedades del sistema sería una descripción verbal de su comportamiento. Podríamos afirmar algo como “conforme cuelgo más

pesos del extremo de la banda elástica, ésta se estira más”. Esta descripción verbal y su observación repetida en otras partes podría llevarnos a inventar el concepto general de “estiramiento” para servir de modelo. Pero si queremos refinar el modelo para hacerlo más útil en una comparación detallada con la observación, nuestros métodos de descripción puramente verbales comenzarán a fallarnos. En efecto, no podemos perfeccionar un concepto tan vago como el estiramiento sin recurrir a la precisión descriptiva que nos permiten los métodos de expresión numérico y matemático. Podríamos entonces hacer una serie de mediciones del alargamiento de la banda elástica en función del peso aplicado, con la expectativa de que éstas nos sugieran un concepto más explícito. Obtendríamos así una serie de observaciones como las que se muestran en la tabla 4-1. (Nótese que nuestra intención es conocer los pesos con exactitud, de modo que, en aras de la simplificación, hacemos caso omiso de la incertidumbre en ellas. Las longitudes son mediciones hechas por nosotros, por lo que han de expresarse en términos de incertidumbre.)

Ahora que tenemos las medidas, ¿nos dan éstas una descripción completa y adecuada del comportamiento del sistema? En realidad no. Es difícil juzgarlo a partir de un conjunto de cantidades en una tabla, y es mucho mejor hacerlo basados en alguna forma de presentación visual. Una simple gráfica de las observaciones comprenderá toda la información contenida en la tabla, y proporcionará, además, el enorme beneficio de facilitar la apreciación visual de los resultados. Presentamos, pues, un diagrama como el de la figura 4-1, en el que hemos graficado, además de los valores centrales de las variables medidas, los intervalos reales en los que las observaciones de alargamiento resultaron inciertas. Adviértase que no hemos hecho más que representar las observaciones en la gráfica. En esta etapa el conjunto de observaciones es lo único que tenemos, y no hay justificación para incluir nada más en la gráfica.

**TABLA 4-1** Alargamiento vs. peso en una muestra elástica.

Peso, kg	Alargamiento, m
0.05	$0.03 \pm 0.01$
0.10	0.04
0.15	0.08
0.20	0.13
0.25	0.19
0.30	0.30
0.35	0.34
0.40	0.38
0.45	0.39

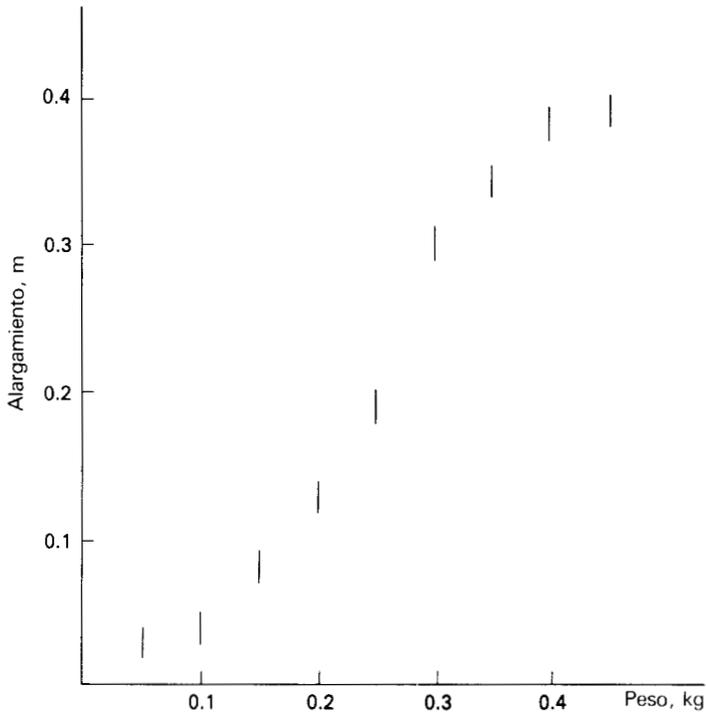


Figura 4-1 Gráfica del alargamiento vs. peso en la muestra elástica hule.

Esto completa la primera etapa del proceso: la observación. Ahora debemos de emprender la siguiente etapa de construcción de un modelo, o modelos, del sistema.

## 4-2 CONSTRUCCION DE MODELOS

El tipo de proceso que se requiere en las diversas etapas depende mucho del experimento en particular. Por ejemplo, podemos estar experimentando sobre un fenómeno para el cual no hay directrices previas. En este caso nuestra tarea podría consistir en generar algún tipo de modelo. Por otra parte, podríamos tener alguna propuesta o teoría previa que pudiese ser aplicada a nuestro sistema, creando así un modelo. Cualesquiera que sean las circunstancias, haremos una distinción entre los modelos que son “empíricos” y los que son “teóricos”. Por modelo “empírico” entenderemos el que está basado solamente en las observaciones, sin referencia alguna a la operación interna y detallada del sistema. El proceso de construcción y su utilidad respectivas se describirán más

adelante. Por otro lado, un modelo teórico se construye en forma más general, no sólo para un intervalo particular de observaciones, y se basa en algún concepto o principio sobre el modo actual de operación del sistema. La naturaleza de los modelos teóricos y su utilidad, también serán analizados. Consideremos cada tipo por separado.

#### a) Modelos empíricos

En esta sección supondremos que hemos efectuado un conjunto de observaciones sobre un sistema para el cual no existe un modelo. Por tanto, todo lo que tenemos es un grupo de observaciones sobre alguna propiedad del sistema. Podría tratarse, digamos, de las mediciones de peso vs. alargamiento en nuestra banda elástica, y los resultados probablemente tomarían la forma de una gráfica como la de la figura 4-1. Nuestro problema, entonces, es construir un modelo adecuado. ¿Qué podemos hacer? Hay varias posibilidades, y las consideraremos en orden de complejidad creciente.

**1) Enunciado verbal.** El modelo más sencillo de todos sería una simple descripción verbal de la variación: “El alargamiento aumenta uniformemente con el peso, según una curva en forma de S”. Nótese que aún esta sencilla frase es una *construcción*. Tan pronto como dejemos de considerar las observaciones individuales y empecemos a ocuparnos de la variación del alargamiento con el peso, habremos realizado la transición de enunciados sobre observaciones particulares a conjeturas elaboradas sobre el comportamiento del sistema. Incluso una proposición imprecisa como la antes señalada podría, con mediciones más minuciosas, resultar insatisfactoria. Quizás, por ejemplo, la variación sea escalonada y no continua. Se hace hincapié aquí en la naturaleza hipotética de tales afirmaciones, como recordatorio de que siempre debemos estar conscientes de la distinción entre afirmaciones sobre las observaciones mismas, y afirmaciones que parecen referirse a las observaciones, pero que en realidad son afirmaciones sobre nuestras *ideas* concernientes a las observaciones.

**2) “Trazar una curva continua por los puntos.”** La siguiente etapa de complejidad relativa en la construcción de modelos está representada por un proceso que suele llevarse a cabo tan comúnmente (por lo general sin la debida apreciación de su importancia) que recibe el nombre del encabezado de esta sección. Recordemos de paso que, como vimos al principio en la gráfica de observaciones (figura 4-1), ésta contiene los puntos observados y *nada más*; aún no tenemos fundamento para incluir nada más en el diagrama. Ineludiblemente, habrá cierta dispersión en los puntos por su incertidumbre inherente, pero es posible basar la construcción de nuestro modelo sobre la hipótesis básica y única de que, pese a la incertidumbre y la dispersión, el comportamiento real del sistema es suave y continuo. Nótese que éste es *nuestro* concepto o idea, y

que, cuando trazamos una “curva suave” (figura 4-2) por los puntos, estamos dando por sentada su validez para el sistema. La hipótesis de un comportamiento suave y continuo puede ser válida con un alto grado de exactitud para muchos sistemas, como, por ejemplo: el movimiento planetario, para el cual se idearon por vez primera muchos de los procedimientos conocidos para el tratamiento de observaciones. Sin embargo, en todos los casos la responsabilidad de decidir suponer o no un comportamiento suave y regular recae en el experimentador, y la suposición deberá hacerse solamente si la familiaridad con el sistema lleva a la convicción cuidadosamente considerada de que es válida.

Las ventajas de suponer un comportamiento regular y de trazar una curva suave por los puntos, pueden ser sustanciales. Uno de los beneficios más obvios está asociado con la interpolación y la extrapolación. Consideremos que tenemos el conjunto de observaciones mostradas originalmente en la figura 4-1, y que hemos trazado una curva continua por los puntos según se muestra en la figura 4-2. Nuestro conocimiento del sistema es bueno en los

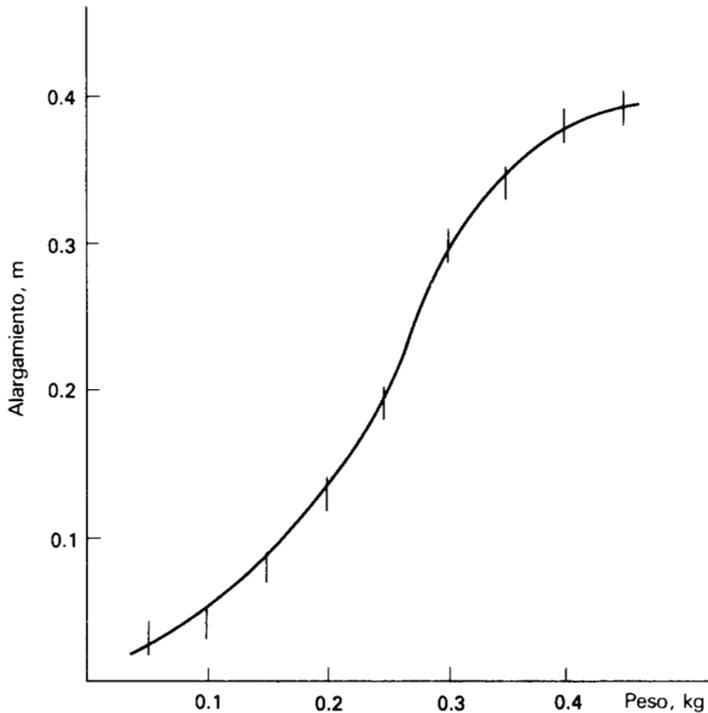


Figura 4-2 Una “curva suave” por las observaciones.

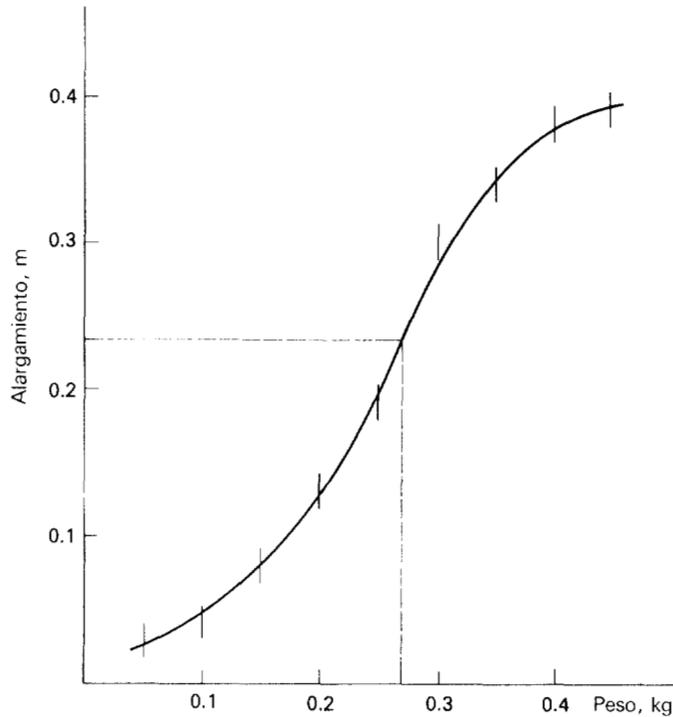
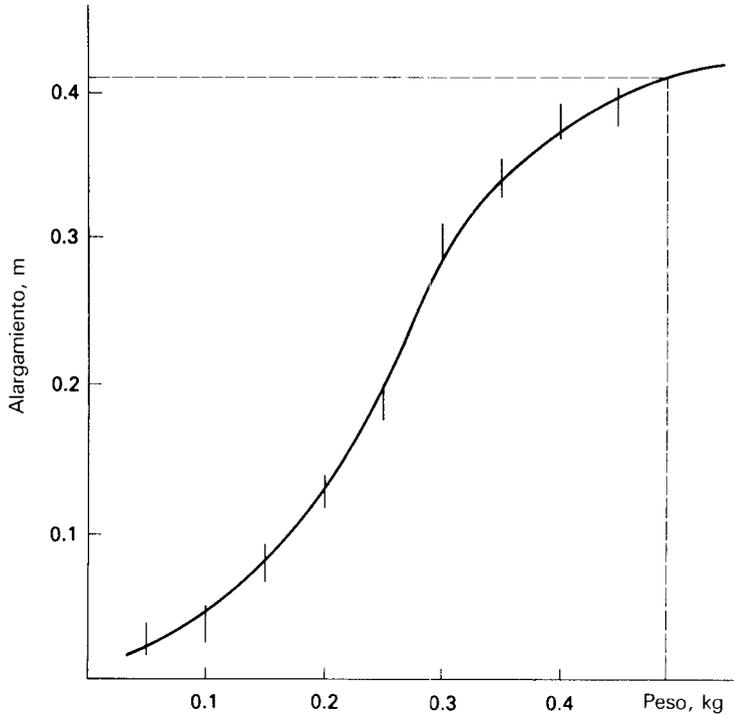


Figura 4-3 El uso de una curva suave para obtener valores por interpolación.

puntos en los que se han hecho mediciones reales. Sin embargo, si deseamos conocer el valor del alargamiento para un peso intermedio entre dos de nuestros valores medidos, tendremos un problema. Podríamos reutilizar los dispositivos y hacer la medición deseada, pero por muchas razones este plan de acción podría resultar ya sea imposible o indeseable. Nos quedamos entonces sólo con la posibilidad de *inferir* el valor deseado sobre la base de las mediciones practicadas. La curva suave y continua que hemos trazado proporciona una forma de hacerlo, como se muestra en la figura 4-3. Debemos, no obstante, tener cuidado de recordar que el resultado obtenido por interpolación es un valor *inferido*, dependiente de nuestra elección sobre la curva suave. De manera similar, puede emplearse una curva suave y continua para extrapolar más allá del intervalo existente de valores, como se muestra en la figura 4-4. Este procedimiento nos permite hacer conjeturas sobre valores fuera del intervalo medido, pero la validez del procedimiento obviamente es mucho más limitada que en el caso de la interpolación. Debemos tener muy buenas razones para creer que el comportamiento del sistema sigue siendo regular más allá del inter-



**Figura 4-4** El uso de una curva continua para obtener valores por extrapolación.

valo medido, porque la variación uniforme dentro del intervalo medido no ofrece, por sí misma, ninguna garantía sobre un margen más amplio de comportamiento (figura 4-5).

Los métodos matemáticos para la interpolación y extrapolación se presentan en el Apéndice 3, y pueden aplicarse para obtener valores intermedios mediante el cálculo, sin trazar efectivamente la curva suave. Estos métodos, con todo, siguen siendo dependientes de la hipótesis de comportamiento regular y continuo del sistema, y los valores inferidos basan su validez en la confiabilidad de esa suposición.

Debido a que la validez de la interpolación y la extrapolación está limitada por la suposición de un comportamiento suave y regular, del sistema considerado, las oportunidades de error abundan. Si, por ejemplo, le presentáramos a alguien la gráfica de temperatura contra tiempo (figura 4-6), sin especificar el sistema, y le pidiéramos que infiriera el valor de la temperatura para un tiempo intermedio entre dos valores medidos, la respuesta usual es el valor que

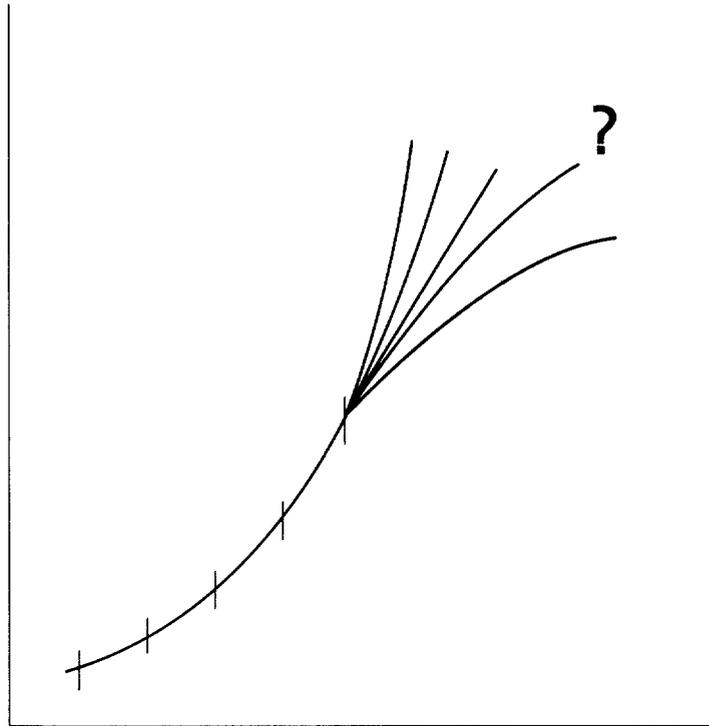


Figura 4-5 La extrapolación no es una de las ciencias exactas.

muestra la gráfica. Podríamos revelarle entonces que la gráfica representa las temperaturas al mediodía de los primeros días del mes, y que estamos preguntando por una temperatura a la medianoche. De igual manera, a cualquiera que crea en la validez infalible de la extrapolación se le puede preguntar por qué no ha ganado una fortuna en la bolsa de valores.

Antes de dejar el tema del trazado de curvas suaves por los puntos, merece mencionarse un procedimiento final. Comúnmente encontramos gráficas en las cuales los puntos se han unido mediante segmentos de líneas rectas (figura 4-7) o algún artificio similar. ¿Cómo debemos interpretar un diagrama de este tipo? Seguramente no nos están pidiendo que creamos que esos segmentos representan el comportamiento del sistema entre los puntos medidos, y el único beneficio posible parece ser el proporcionar cierto tipo de énfasis. A veces, en un diagrama con varias gráficas, las cuales posiblemente se intersecten, los segmentos en cuestión sí nos ayudan a identificar las diferentes gráficas, ya que esos segmentos no representan con satisfacción a ninguno de los dos compo-

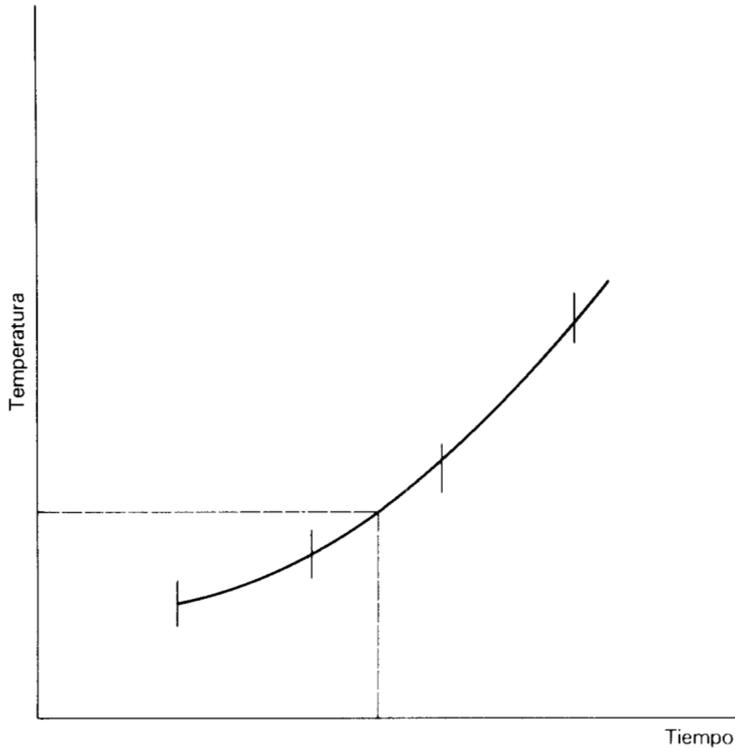
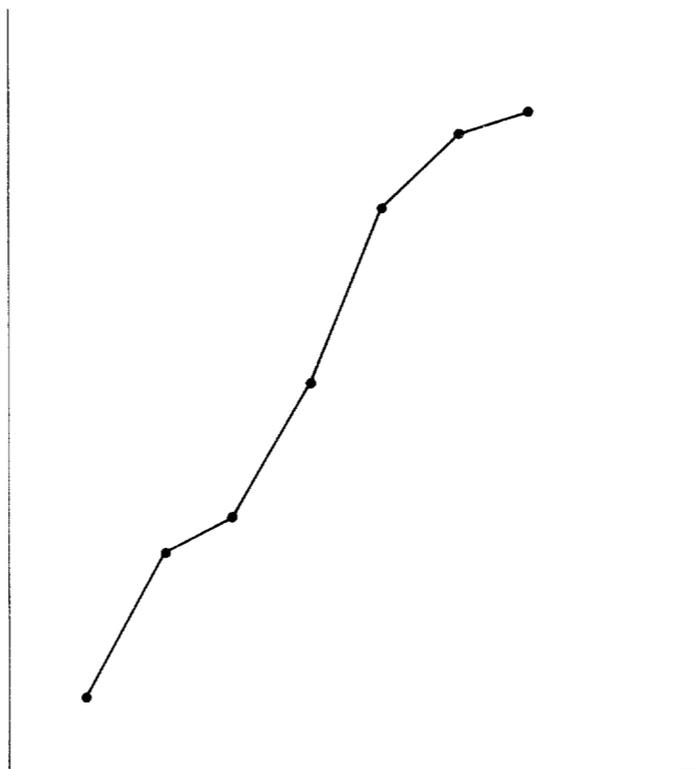


Figura 4-6 Uso potencialmente falaz de la interpolación.

nentes básicos de la experimentación, es decir las observaciones y los modelos, raramente son benéficos y al usarlos pueden llevarnos a resultados engañosos. Para el trabajo científico no se recomiendan, excepto en casos especiales.

**3) Búsqueda de funciones.** Como una forma más elaborada de trazar curvas continuas por puntos, podemos usar una variedad de métodos matemáticos para encontrar una función analítica que se ajuste a esos puntos. Desde luego, pese a toda la elaboración matemática que representan, estos procedimientos todavía dependen para su validez de la suposición básica de un comportamiento regular en el sistema; las curvas y funciones asociadas constituyen *nuestro* concepto del comportamiento del sistema. Con todo, las funciones generadas empíricamente para ajustarse a conjuntos de observaciones pueden ser muy útiles. Como modelos matemáticos del sistema pueden, con precisión variable, aplicarse para obtener valores inferidos de algunas características del sistema. Por ejemplo, se pueden usar modelos matemáticos de la economía nacional para evaluar el efecto probable sobre el producto nacional bruto de un



**Figura 4-7** Una gráfica que muestra el uso de segmentos lineales.

cambio en las tasas del impuesto sobre la renta, o, en otro caso de precisión aún mayor, los modelos matemáticos del movimiento planetario nos permiten predecir la hora de la salida del Sol mañana por la mañana o la fecha del próximo eclipse.

Por ahora basta señalar la posibilidad de construir modelos matemáticos empíricos del sistema. Los métodos respectivos se describirán en el capítulo 6.

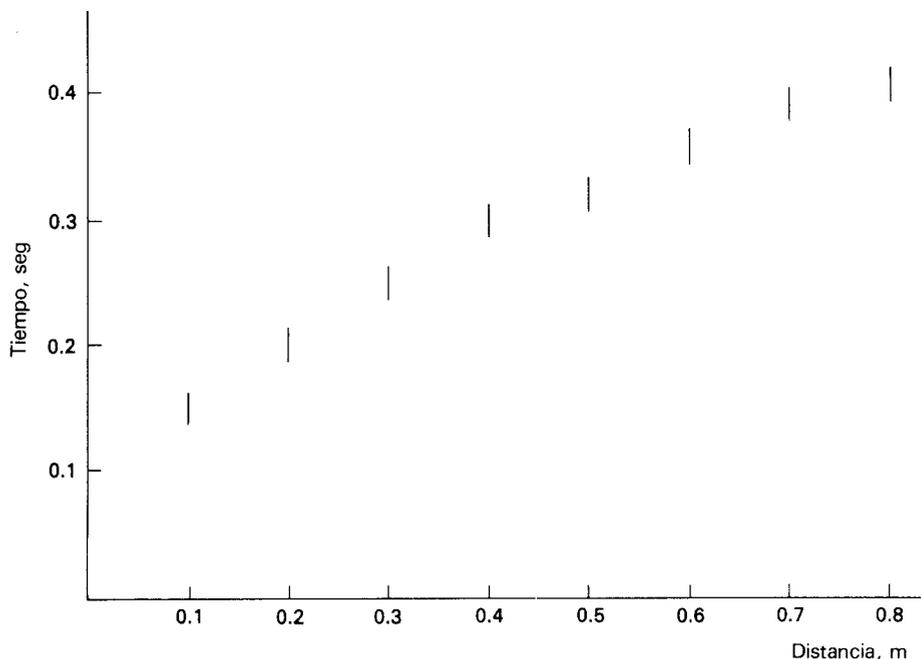
#### b) Modelos teóricos

Los modelos teóricos son parte de nuestra ya familiar física teórica. Todas las teorías analíticas en la física se construyen con bloques conceptuales básicos, como definiciones, axiomas, hipótesis, principios, etc., seguidos de una derivación analítica a partir de estos puntos básicos de partida. Como todos los elementos de las teorías son construcciones de la imaginación humana, las

teorías mismas y los resultados de éstas son, de igual manera, construcciones imaginarias. Su pertinencia para los sistemas reales deberá evaluarse a través de la experimentación.

Vamos a ilustrar la situación usando un ejemplo particular. Consideremos un sistema en el que podemos soltar un balón de acero para que caiga libremente por efecto de la fuerza de gravedad, y midamos su tiempo de caída desde diferentes alturas. Si quisiéramos construir un modelo empírico de este sistema, podríamos simplemente medir el tiempo de caída desde varias distancias diferentes y graficar los resultados, que se verían como algo parecido a la figura 4-8. Podríamos aplicar entonces alguna de las técnicas de la sección precedente para obtener un modelo empírico del sistema. Si, en cambio, quisiéramos construir un modelo teórico de la misma situación, nuestro enfoque sería completamente diferente. Tendríamos que escoger un conjunto de axiomas o hipótesis básicos a partir de las cuales derivaríamos los resultados requeridos. Por ejemplo, podríamos decidirnos a usar como hipótesis básica un valor supuesto de la aceleración del balón:

$$a = 9.81 \text{ m seg}^{-2}$$



**Figura 4-8** Gráfica del tiempo de caída vs. distancia para un objeto con caída libre.

Nótese que esta hipótesis ya contiene varios supuestos acerca del sistema, con lo cual se inicia nuestro proceso de construcción de un modelo inventado. Por ejemplo: al escoger un valor constante para la aceleración, implícitamente estamos despreciando la presencia de resistencia del aire. Tenemos todo el derecho de hacerlo. Como el modelo es nuestro, somos libres de construirlo en la forma que nos plazca. Que tal hipótesis lo haga un *buen* modelo o no, es algo que aún no podemos asegurar. Como segundo ejemplo, estamos despreciando también los efectos asociados con la relatividad general, y si ésta es una falla grave o no igualmente estará por verse. Por supuesto, deberíamos tratar de estimar por adelantado la validez de las suposiciones que están implícitas en el modelo, pero con frecuencia nuestra capacidad para hacerlo es limitada. Siempre existe algún punto en el cual tenemos que decidirnos a empezar la experimentación con el modelo tal como está, y apoyarnos en los resultados experimentales para saber si acaso es necesario un refinamiento adicional del modelo.

Suponiendo que los métodos del cálculo diferencial sean apropiados para nuestro problema, podemos proceder con la derivación. Por integración, obtenemos que:

$$v = 9.81t \quad (\text{suponiendo } v = 0 \text{ en } t = 0)$$

y

$$x = \frac{9.81}{2} t^2 \quad (\text{suponiendo } x = 0 \text{ en } t = 0)$$

o

$$t = \left( \frac{1}{4.905} \right)^{1/2} x^{1/2}$$

En el curso del razonamiento, todos los supuestos que se incluyen constituyen nuevos componentes del modelo. El resultado final para la variable medible, el tiempo de caída, es una propiedad del modelo. Su aplicabilidad al sistema deberá ser el siguiente tema de investigación.

### 4-3 PRUEBA DE MODELOS TEORICOS

Consideremos ahora un experimento real de caída libre bajo la acción de la gravedad que dio los resultados que se muestran en la tabla 4-2. Estas mediciones describen el comportamiento del sistema. También tenemos el comportamiento del modelo en la forma de la función obtenida analíticamente:

$$t = \left( \frac{1}{4.905} \right)^{1/2} x^{1/2}$$

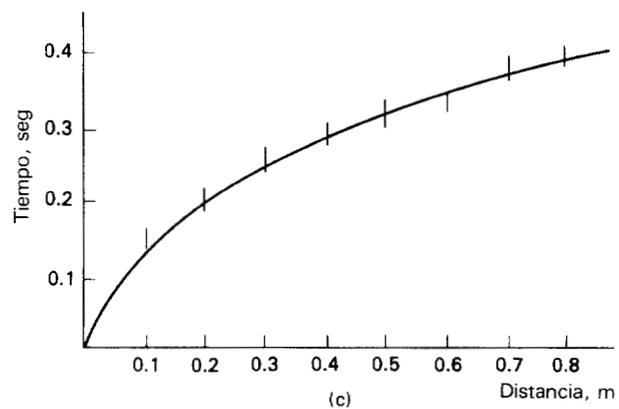
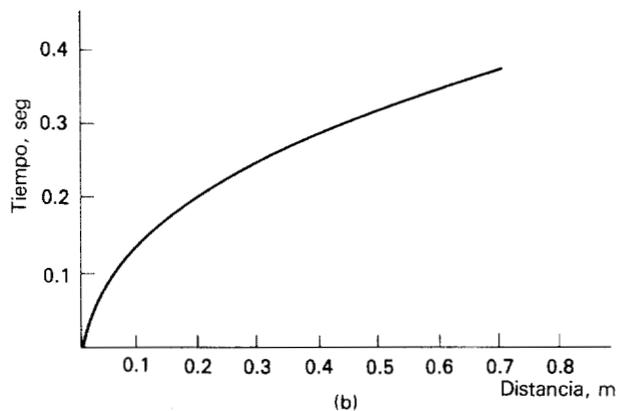
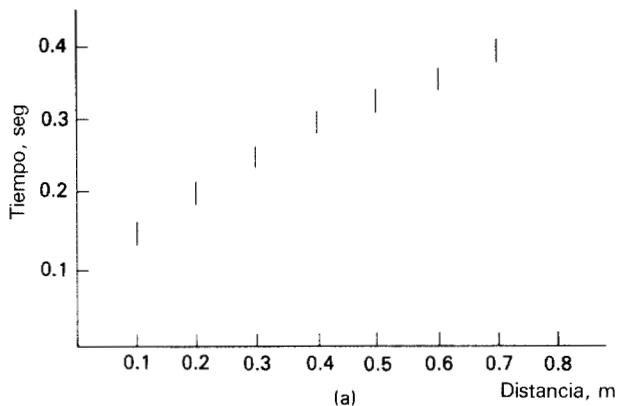
**TABLA 4-2** Tiempo de caída medido experimentalmente vs. distancia, para un objeto en caída libre.

Distancia, $x$ , m	Tiempo, $t$ , seg
.1	.148 ± .015
.2	.196
.3	.244
.4	.290
.5	.315
.6	.352
.7	.385
.8	.403

Nuestra tarea consistirá, en cierto modo, en comparar esos dos resultados, aunque no esté del todo claro cómo se hará esto. Una sugerencia sencilla sería introducir los diversos valores de  $x$  en la ecuación y calcular los valores correspondientes de  $t$ . Luego podríamos comparar éstos con los valores medidos. Si coinciden exactamente, quizá podríamos confiar en que el sistema y el modelo se corresponden. Sin embargo, la probabilidad de que eso ocurra es minúscula; aparte de todo lo demás, la presencia de incertidumbre en las medidas eliminaría la posibilidad de una correspondencia exacta. No obstante, lo más importante es que es muy poco probable que nuestro modelo esté totalmente libre de fallas y deficiencias sistemáticas. De hecho, uno de nuestros principales propósitos en la experimentación es detectar esas discrepancias y tratarlas constructivamente. La posibilidad de hacerlo con eficacia empleando la comparación aritmética elemental es pequeña. Para nuestros fines es mucho más significativo el comportamiento global del sistema, y la mejor manera de apreciarlo es en una gráfica.

La gráfica de nuestras observaciones, que se muestra en la figura 4-9(a), consiste en una serie de puntos. La gráfica del comportamiento del modelo es una curva, y se muestra a su vez en la figura 4-9(b). Las dos gráficas juntas nos dan una impresión visual de la relación entre las propiedades del sistema y el modelo. Nuestra comparación, sin embargo, sería todavía más detallada si pudiéramos tomar una de las gráficas y colocarla sobre la otra. Al hacerlo, obtendremos el diagrama compuesto que se muestra en la figura 4-9(c). Nótese que este diagrama contiene dos componentes diferentes: 1) puntos que representan las propiedades del sistema, y 2) una línea que corresponde a la función analítica que pertenece al modelo.

Al fin podemos hacer una comparación detallada entre las propiedades globales del sistema y del modelo. Por una inspección visual directa podremos



**Figura 4-9** El proceso de comparar las propiedades de un sistema real con las propiedades de un modelo.

afirmar si el modelo y el sistema se corresponden, divergen o lo que sea. Enumeraremos las distintas posibilidades con más detalle en el capítulo 6. Por el momento, debemos observar cuidadosamente la clase de afirmación que podemos hacer al final de un experimento. Podemos aseverar solamente que el comportamiento del modelo y del sistema estuvieron (o no estuvieron) en correspondencia en tal y tal medida. No tiene sentido angustiarse por la decisión de si una teoría es “verdadera”, “correcta”, “falsa”, o lo que fuere. Debemos evitar emplear términos como éstos, aunque estemos seguros en lo personal de tener clara la situación, dadas las múltiples oportunidades de ser mal interpretados. Es mucho mejor catalogar una teoría o un modelo como “satisfactorio” o “suficientemente bueno”, o alguna otra denominación parecida, porque todas estas decisiones son relativas a los propósitos que nos animan.

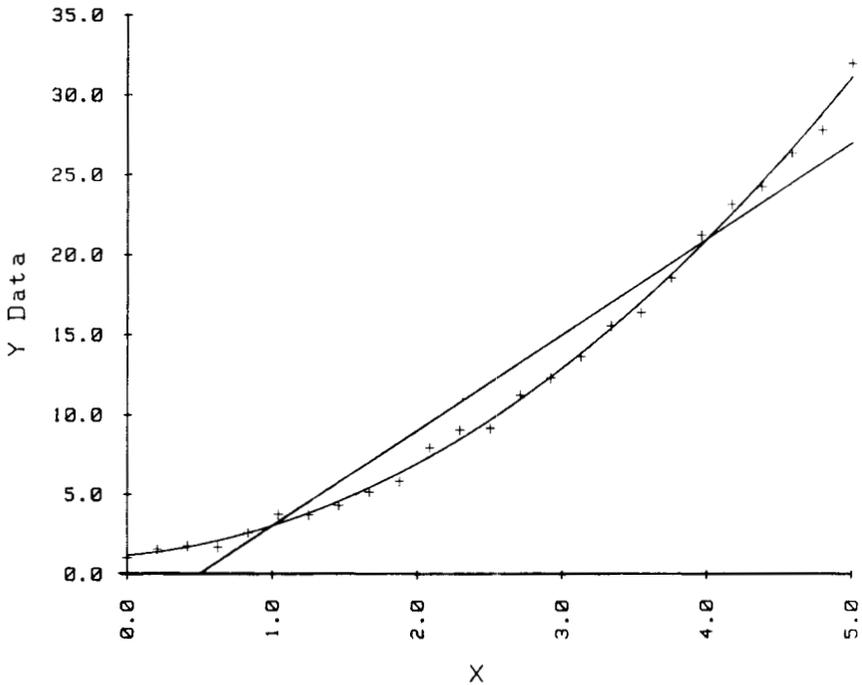
Por ejemplo, nuestro sencillo modelo de aceleración constante bajo la acción de la gravedad puede ser perfectamente satisfactorio para encontrar la profundidad de un pozo dejando caer una piedra dentro de él, pero no sería adecuado para calcular la trayectoria de un vehículo espacial en ruta hacia la Luna. Si éste fuera nuestro objetivo, tendríamos que construir una teoría más refinada hasta que tuviéramos una que fuera “suficientemente buena” para ese propósito. Aun entonces podríamos encontrar que una teoría que sea adecuada para los cohetes lunares resulte inadecuada para describir el movimiento del planeta Mercurio. Para este fin, la teoría de la gravitación de Newton debe reemplazarse con la teoría de la relatividad general de Einstein. Como antes, la adecuación de la teoría de Einstein para describir la órbita de Mercurio (en un nivel particular de precisión) no “prueba” que ésta sea cierta o correcta, simplemente que es lo suficientemente buena para ese propósito. Igualmente, la presencia de la teoría de Einstein no desacredita ni a la teoría de la gravitación de Newton ni a nuestro sencillo modelo de aceleración constante bajo la acción de la gravedad. La mayoría de las personas no miden la profundidad de un pozo usando la teoría de la relatividad de Einstein. En general, empleamos una teoría particular porque es suficientemente buena para los propósitos que tenemos entre manos. Si se desea una precisión mayor en cualquier momento, los refinamientos necesarios podrán introducirse según se requiera (a menos, por supuesto, que estemos trabajando en las fronteras del conocimiento en un área en particular, y el obstáculo principal entonces será la ausencia de una teoría superior).

Como ya no vamos a seguir usando el engañoso concepto de “verdad” o “falsedad” de las teorías y modelos, dependeremos de nuestra propia decisión de que el modelo escogido sea suficientemente bueno o no para nuestro propósito. Una de las metas principales del diseño de experimentos es, por tanto, probar los modelos que utilizamos y verificar su adecuación para nuestro propósito. Si se planea adecuadamente, el experimento mismo nos dirá si nuestro modelo o teoría es lo bastante bueno.

De paso, cabe señalar una interesante cuestión filosófica. Aun cuando nuestro sistema y el modelo parezcan estar en completa correspondencia, debemos ser cuidadosos al enunciar el resultado. Todo lo que podemos afirmar es que, a un nivel particular de precisión, no hemos logrado observar discrepancia alguna entre el sistema y el modelo; no podemos decir que hemos “probado” que una teoría sea “correcta”. Por otra parte, es posible ser más afirmativos si estamos seguros de que las propiedades del modelo y del sistema discrepan en una cantidad que claramente excede la incertidumbre de la medición; podemos afirmar sin duda alguna que el modelo no está en correspondencia con el sistema. Si uno quiere, podemos decir que hemos “probado” que la teoría es “falsa”, aunque, aun en este caso, sería mejor calificarla de “impropia” o “inadecuada”.

Antes de continuar, debemos hacer notar que este proceso de comparar sistemas y modelos depende de nuestra capacidad para trazar las gráficas de las funciones que aparecen en los modelos. En otros tiempos esto presentaba dificultades sustanciales aun para funciones sencillas, como la parábola, y a menudo dificultades insuperables para funciones más complicadas. Pero ahora, el uso de las computadoras nos permite hacer la comparación directamente. Si disponemos de una computadora o terminal adecuada, podemos hacer arreglos para que nuestros resultados experimentales se desplieguen directamente, ya sea en papel en una graficadora o en una pantalla de presentación de video, junto con la gráfica de cualquier función que escojamos. Hay ventajas enormes en este uso de las computadoras, porque es muy fácil cambiar las características o los parámetros del modelo en una búsqueda de mejor correspondencia entre modelo y observaciones. Podemos también ensayar funciones completamente diferentes, con lo que ampliamos enormemente la gama de modelos que se pueden comparar con el sistema. La figura 4-10 muestra una de esas gráficas, en la cual la computadora nos ha presentado dos gráficas posibles, lo que hace sumamente fácil la elección entre las dos funciones. Si además somos lo suficientemente afortunados para alimentar la salida de nuestros sistemas de medición directamente a la computadora, de modo que se posibilite un procesamiento continuo de observaciones y la comparación con los modelos, tendremos a nuestra disposición todo un nuevo dominio de la experimentación. La computadora no solamente evaluará nuestro experimento en forma continua, permitiendo un refinamiento del modelo sobre la marcha, sino también puede usarse para controlar los dispositivos mismos, elevando así nuestro experimento a un nivel de operatividad que no es factible alcanzar con métodos de trabajo manuales.

Sin embargo, aun en esta era de las computadoras, no debemos descuidar el desarrollo de nuestra propia competencia personal en la experimentación. En primer lugar, cuando no hay una computadora disponible, estamos



**Figura 4-10** Funciones generadas por computadora comparadas con observaciones experimentales.

obligados a apoyarnos en nuestros propios recursos. En segundo, aun cuando nos ocupemos de la experimentación basada en computadora, corremos el riesgo de obtener resultados completamente sin sentido a menos que estemos totalmente conscientes de cada detalle del manejo y los cálculos del experimento que se han alimentado a la computadora. Por tanto, a fin de aumentar nuestra propia pericia personal, debemos dirigir nuestra atención a los procedimientos tradicionales que constituyen la base de casi toda la experimentación.

Si estamos restringidos a usar lápiz, papel cuadriculado y regla, estamos prácticamente obligados a comparar el modelo con el sistema usando la única función cuya gráfica es fácil de dibujar: la línea recta. (Por razones bastante obvias excluimos de nuestra consideración la otra gráfica sencilla, el círculo.) Una gran proporción de análisis experimentales sigue llevándose a cabo en forma lineal, y aunque las técnicas gráficas puedan ser engorrosas y tediosas en comparación con la facilidad de la graficación asistida por computadora, los métodos son lo suficientemente poderosos, importantes y comunes en su aplicación para que tengamos que familiarizarnos con ellos.

## 4-4 USO DEL ANALISIS DE LINEAS RECTAS

Nuestro objetivo es arreglar el proceso de trazado de la gráfica de modo tal que el comportamiento del sistema y el modelo se representen en una gráfica de forma lineal.

Consideremos nuestra función anterior para el tiempo de caída libre bajo la acción de la gravedad:

$$t = \left( \frac{1}{4.905} \right)^{1/2} x^{1/2}$$

la que nos lleva a una representación parabólica en una gráfica de  $t$ ,  $x$ . Suponiendo que fuéramos a graficar, no  $t$  vs.  $x$ , sino  $t$  vs.  $x^{1/2}$ , nuestra ecuación

$$t = .4515x^{1/2}$$

podría entonces compararse con la ecuación de una línea recta:

$$\text{variable vertical} = \text{pendiente} \times \text{variable horizontal}$$

Ahora bien, con

$$\text{variable vertical} = t$$

$$\text{variable horizontal} = x^{1/2}$$

y

$$\text{pendiente} = .4515$$

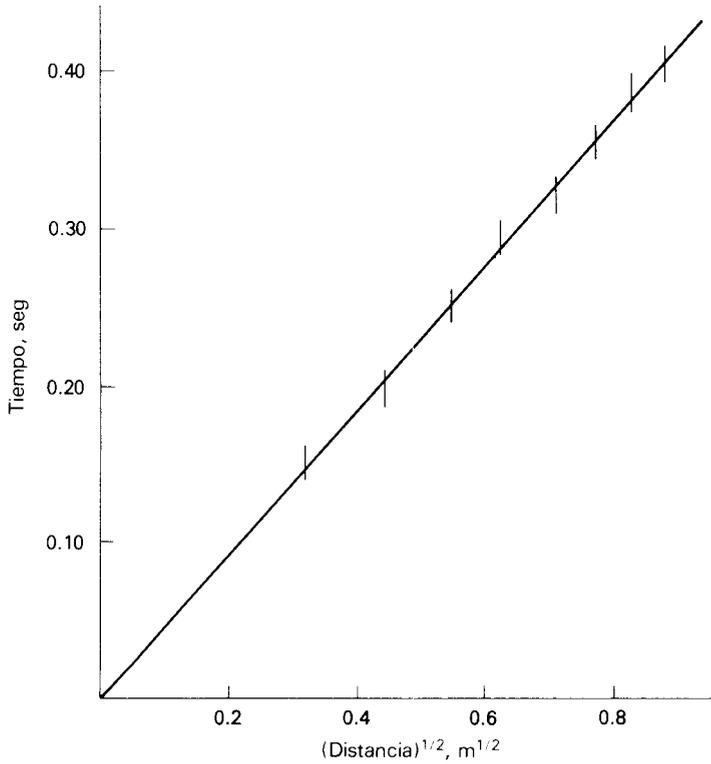
Los valores experimentales de  $x^{1/2}$  y  $t$  se dan en la tabla 4-3 y se grafican en la figura 4-11. Esta gráfica también contiene la línea que representa la función, y la simplificación resultante es inmediatamente obvia. Todo el proceso de comparación se facilita, y podemos identificar de inmediato el grado de correspondencia entre el modelo y el sistema.

Nótese que el proceso habría sido igualmente eficaz si hubiéramos graficado  $t^2$  vs.  $x$  en lugar de  $t$  vs.  $x^{1/2}$ . La pendiente habría sido diferente, pero la oportunidad de comparar el modelo y el sistema hubiese sido igualmente buena.

Observemos por último que, en este ejemplo, las propiedades del modelo fueron especificadas completamente, y que la línea que representa el compor-

**TABLA 4-3** Tiempo de caída medido experimentalmente vs. raíz cuadrada de la distancia para un objeto que cae libremente.

Distancia, $x$ , m	$(\text{Distancia})^{1/2}$ , $x^{1/2}$ , $\text{m}^{1/2}$	Tiempo, $t$ , seg
.1	.316	.148 $\pm$ .015
.2	.447	.196
.3	.548	.244
.4	.632	.290
.5	.707	.315
.6	.775	.352
.7	.837	.385
.8	.894	.403



**Figura 4-11** Comparación entre las propiedades de un modelo y del sistema cuando se expresa en forma de línea recta.

tamiento del modelo en la figura 4-11 es única. Esta situación es ligeramente diferente si el modelo incluye parámetros de los cuales no conocemos el valor; éste será el tema de la sección siguiente.

#### 4-5 EL CASO DE LAS CONSTANTES INDETERMINADAS

Consideremos que estamos realizando un experimento con un resorte para determinar su alargamiento con diferentes pesos. Supongamos que estamos conscientes de la propuesta (debida a Hooke) de que el alargamiento  $x$  puede considerarse proporcional a la carga  $W$ . Esta propuesta,

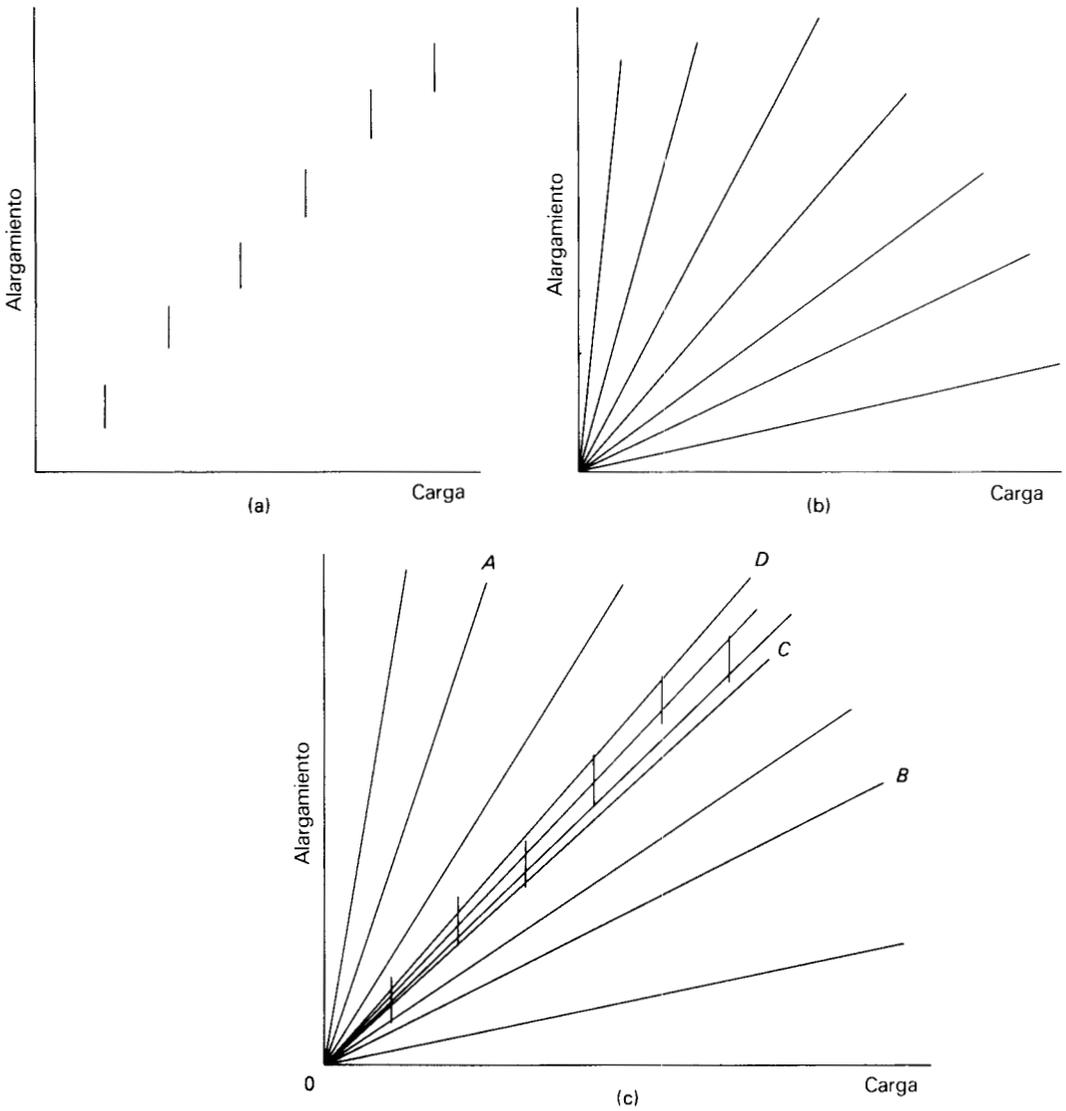
$$x = \text{constante} \times W$$

constituye un modelo inventado del sistema; supongamos pues que queremos probar este modelo contra nuestro sistema. El único problema es que probablemente no sepamos qué valor de la constante (de elasticidad) usar para nuestro resorte. Pongamos por caso que hemos hecho mediciones del alargamiento vs. carga y los hemos graficado en la figura 4-12(a). ¿Qué debemos hacer para representar el comportamiento del modelo? La ecuación

$$x = \text{constante} \times W$$

en realidad representa el conjunto infinito de líneas rectas en el plano  $W - x$  que tienen todos los valores posibles de pendiente, desde cero hasta infinito, que corresponden al intervalo infinito de posibilidades para el valor de la constante. Algunas de estas líneas están representadas en la figura 4-12(b). ¿Qué, entonces, constituye el resultado de nuestra comparación? Colocar una gráfica encima de la otra produce el diagrama que se muestra en la figura 4-12(c), y nos da la oportunidad de escoger una línea que sea compatible con los puntos experimentales.

¿Pero cuál línea o líneas hemos de escoger? Es claro que las líneas  $OA$  y  $OB$  no tienen una relación obvia con las observaciones y se pueden omitir. Por otra parte, podemos identificar un cierto haz de líneas que está incluido en la región de incertidumbre de los puntos medidos. Podemos apreciar visualmente los extremos de ese haz, y los representan las líneas  $OC$  y  $OD$ . Dentro de estos límites, todas las líneas tienen cierto grado de consistencia con las observaciones, pero ninguna línea aislada se destaca como única adecuada. Por tanto, todo lo que podemos afirmar por el momento es que las observaciones son compatibles con el modelo dentro de un cierto intervalo de pendientes. Esto significa que hay un cierto intervalo de valores de “estiramiento” (que es una propiedad del modelo) que son consistentes con nuestro sistema. Nuestra



**Figura 4-12** El uso de análisis de líneas rectas para obtener el valor de una constante indeterminada en un modelo.

conclusión, entonces, es que si tenemos una constante inicialmente indeterminada en nuestro modelo, se puede utilizar el proceso de experimentación para determinar, dentro de un cierto intervalo, el valor que es apropiado pa-

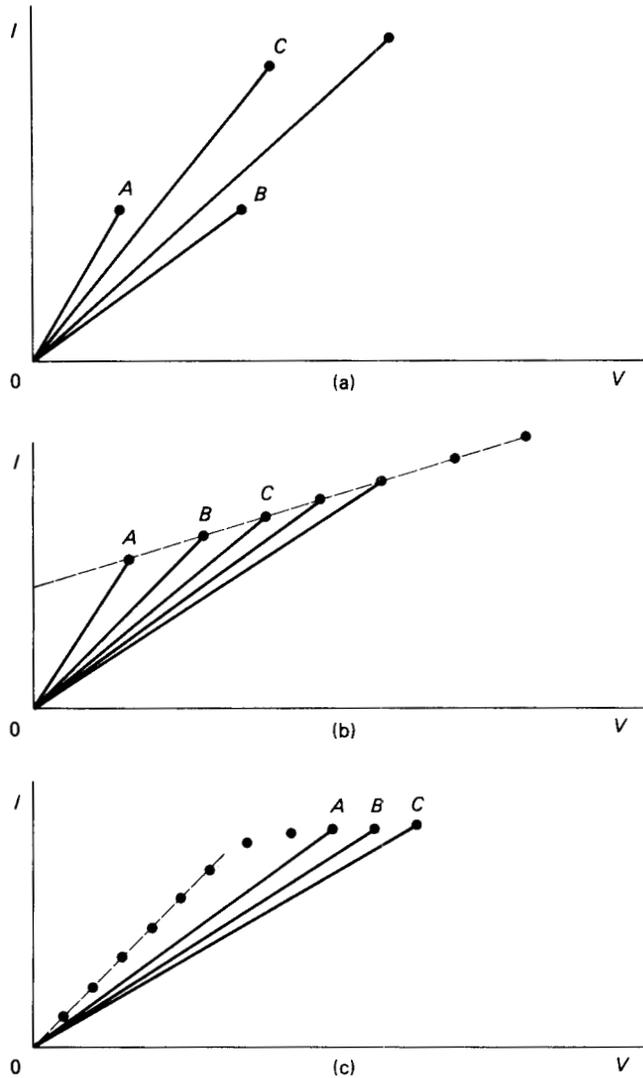
ra nuestro sistema. Esta es, de hecho, la forma normal de determinar valores experimentales de parámetros físicos.

Se utiliza comúnmente porque, además de que el uso de la gráfica casi siempre es necesario para comparar modelos y sistemas, los métodos gráficos para obtener valores de las constantes experimentales ofrecen tantas ventajas adicionales en el mejoramiento de la precisión que su uso es apremiantemente atractivo. Las posibilidades de error al emplear solamente el cálculo algebraico sin verificarlo gráficamente, son muy grandes. Supongamos que estamos tratando de obtener un valor calculado, por ejemplo, la resistencia eléctrica de un resistor a partir de la variación del voltaje entre sus extremos y el de la corriente que pasa por él. Haríamos pares de observaciones de  $I$  y  $V$ , y procederíamos a usar  $V = RI$  directamente para obtener un valor de  $R$  en cada par de valores  $V$ ,  $I$  por medios meramente algebraicos. Luego podríamos esperar obtener un valor más exacto de  $R$  calculando el promedio de todos los valores resultantes de  $R$ .

Este enfoque sin embargo, es deficiente de varios modos. Fundamentalmente, desde luego, no satisface el requerimiento primordial de comparar las propiedades del sistema y el modelo, y las consecuencias para la exactitud de nuestro valor de  $R$  pueden ser graves. Si todos nuestros pares de valores de  $V$ ,  $I$ , dieran el mismo, o casi el mismo, valor de  $R$ , podríamos confiar en nuestra medición de  $R$ , aun sin dibujar la gráfica de  $V$ ,  $I$ . Empero, en el más probable caso de que nuestros valores de  $R$  no resulten ser todos iguales, no tenemos manera, sin la gráfica, de interpretar las variaciones.

Podríamos, por ejemplo, encontrar un caso en el que, como lo revelaría el trazado de la gráfica, los puntos mostraran más dispersión de la que esperábamos. [Véase la figura 4-13(a).] Usando un método gráfico, todavía podríamos escoger una línea recta adecuada (que pasara por el origen, si estamos seguros de que el origen es un punto medido), y tener una confianza razonable en nuestro valor de  $R$  obtenido a partir de la pendiente. Nuestra confianza se justifica porque la apariencia de la gráfica nos convence de que estamos tratando con una simple dispersión alrededor de una variación básicamente lineal. Nuestro cálculo algebraico, no gráfico, nos daría por otro lado valores que corresponden a las pendientes de las líneas  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , etc. En una simple tabla de datos, la variabilidad resultante no tendría sentido alguno, y no lograríamos mayor comprensión de lo que está pasando.

Como una ilustración más significativa de lo inadecuado del enfoque algebraico y no gráfico, consideremos un caso en el que cierta falta de correspondencia entre el modelo y el sistema da lugar ya sea a una ordenada al origen inesperada, o a una desviación del comportamiento lineal a partir de un cierto



**Figura 4-13** Uso de las gráficas para evitar errores en la determinación de pendientes.

alcance. Aplicando el enfoque gráfico, fácilmente podemos detectar y compensar esas discrepancias entre el modelo y el sistema. En el primer caso, la gráfica nos permite obtener un valor confiable de  $R$  a partir de la pendiente, que, en esos casos, no se ve afectado por la presencia de la ordenada al origen. En el segundo caso, obtendríamos el valor de  $R$  a partir de la pendiente de la

porción lineal de la variación de  $I$  vs.  $V$ , eliminando justamente los puntos no lineales, porque quedan fuera del alcance del modelo. La oportunidad de hacer este discernimiento puede derivarse únicamente de la inspección visual de la gráfica, que aclara la situación de un vistazo. Aquí, como antes, el cálculo algebraico y no gráfico de los pares de valores aislados de  $V$ ,  $I$  daría valores de  $R$  que corresponden [véase la figura 4-13(b) y (c)] a las pendientes de  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , etc. Esas pendientes no tienen nada que ver con el valor que buscamos, y si las incluyéramos en un promedio de cantidades calculadas algebraicamente, sólo lograríamos introducir un error en nuestros resultados.

Como de esta manera nos aseguramos de que nuestro resultado final esté libre de esas fuentes de error sistemático, no importa si sabemos el origen de las discrepancias o no. Para el propósito de obtener el valor del parámetro que se estudia, es suficiente en esta etapa identificar simplemente la existencia de la discrepancia y asegurarse de que no introduzca errores en el resultado. Podemos proceder después a considerar los posibles orígenes de la discrepancia.

Hemos examinado el proceso para obtener valores de constantes inicialmente indeterminadas únicamente en términos de pendientes. En principio, como una recta tiene dos grados de libertad en un plano, es posible obtener de ella una pendiente y una ordenada al origen como dos partes de información independientes. Debido a eso, se puede hacer que un experimento dé valores para dos parámetros independientes que aparezcan en la teoría. Los métodos específicos en la práctica al respecto, se tratarán en el capítulo 6.

# 5

## Diseño de experimentos

En el capítulo 4 describimos las diferentes circunstancias en las que comparamos las propiedades de los modelos y las de los sistemas. Encontramos tal diversidad que no nos sorprenderá el enterarnos de que no hay una sola forma de planear los experimentos. Las técnicas y procedimientos que usemos dependerán de las circunstancias, y describiremos procedimientos que son adecuados para una gran cantidad de casos. La relación no es exhaustiva, pero encontraremos que los principios generales son válidos en una amplia variedad de circunstancias experimentales.

Supondremos desde el principio que, como resultado de la investigación preliminar, ya conocemos las variables significativas; algunas de ellas estarán bajo nuestro control y pueden servir como variables de entrada; las otras tomarán valores determinados por el sistema, y serán las variables de salida. En las secciones siguientes supondremos que las variables de entrada se pueden separar y controlarse individualmente; de otra forma, si todas varían a la vez, la interpretación de los resultados será mucho más difícil. A menudo enfrentamos esta desafortunada circunstancia en la experimentación profesional, pero aquí nos restringiremos al caso de un experimento totalmente controlado.

### 5-1 COMO PROBAR UN MODELO EXISTENTE

En esta sección nos ocuparemos de situaciones en las cuales ya se dispone de un modelo de algún tipo. Este modelo podría ser una sugerencia de las más

sencillas (tal vez incluso totalmente empírica), como  $F = kx$  o  $V = RI$ , o podría derivarse de una teoría importante y compleja como la teoría de la relatividad general de Einstein. Cualquiera que sea la naturaleza del modelo, sus propiedades casi invariablemente tomarán la forma de una relación funcional entre dos o más variables. Nuestro objetivo principal será, como siempre, comparar las propiedades del modelo con las del sistema. Sólo una vez que, mediante pruebas experimentales, nos hayamos convencido de que, al menos en un cierto intervalo, el sistema y el modelo se corresponden, podemos sentirnos motivados a seguir adelante con el cálculo de la cantidad que queremos medir.

Nótese que nuestra decisión de que el modelo sea satisfactorio o no, debe basarse en el experimento mismo. No vamos, por supuesto, a tratar de tomar una decisión en cuestiones carentes de sentido como: “¿Es el modelo o la teoría ‘cierto’ o ‘falso’? ¿‘correcto’ o ‘incorrecto’?”, o cualquier otra parecida. Como ya hemos dicho muchas veces, todos los modelos son imperfectos en principio, y simplemente necesitamos saber si el modelo es “lo bastante bueno” para nuestros propósitos, al nivel de precisión que queremos. Sólo nuestro experimento mismo puede proporcionar las bases para tomar esa decisión, y tenemos que tratar de asegurarnos, mediante un diseño cuidadoso, de que así sea. Una vez que hemos verificado que nuestro modelo es “suficientemente bueno”, podemos proceder a calcular nuestra cantidad desconocida, sin olvidar que, si nuestra situación cambia y se requiere además precisión mayor, debemos replantearnos la cuestión de si el modelo es adecuado para nuestro propósito.

Como explicamos en la sección 4-3, encontraremos, casi invariablemente, que las mejores maneras de probar modelos de sistemas físicos implican un tratamiento gráfico. En principio queremos dibujar una gráfica que ilustre el comportamiento del modelo, y sobreponer en ella los puntos que representan nuestras observaciones del comportamiento del sistema. Para hacerlo en forma sencilla, empero, hay ciertos requisitos que debemos de cumplir.

En primer lugar, como una gráfica (tal como la consideramos) es un diagrama bidimensional, debemos limitarnos inicialmente a dos variables. En muchos casos esto se satisface automáticamente, como ha ocurrido en todos los ejemplos anteriores. En otros casos, sin embargo, nuestra variable será función de dos (o más) variables independientes. No podemos graficar tres variables como coordenadas en una hoja de papel cuadriculado bidimensional (aunque los diagramas tridimensionales se pueden generar por computadora, y se ven con frecuencia en la literatura científica). En consecuencia, para nuestros propósitos, es necesario simplificar el experimento manteniendo una de las variables de entrada constante mientras estudiamos la dependencia de la variable de salida respecto de la otra. Podemos modificar entonces la segunda variable con un nuevo valor fijo y repetir el proceso. Con una serie de mediciones

como ésta, podemos construir una imagen relativamente completa del comportamiento del sistema. Obsérvese que el éxito del proceso depende de nuestra hipótesis básica de que es posible mantener una de las variables de entrada constante, independientemente de la variación de la otra. Si este aislamiento de las variables de entrada no es posible, tendremos problemas; algunas de las técnicas necesarias se mencionarán en la sección 5-2(b).

Para nuestro propósito actual vamos a suponer que tenemos sólo una variable de entrada, ya sea porque sólo existe una, o porque podemos aislar una manteniendo las otras constantes. Nuestro procedimiento experimental es claro: tenemos que medir la variación de la variable de salida con la variable de entrada, y graficarla para hacer la comparación con la correspondiente gráfica del modelo. Sin embargo, como hemos sugerido en la sección 4-3, haría falta una computadora para dibujar incluso funciones sencillas no lineales, y las ventajas de dibujar nuestras gráficas en forma de línea recta son tan arrolladoras que sólo tomaremos en cuenta este planteamiento.

## 5—2 ECUACIONES CON GRAFICA EN FORMA DE LINEA RECTA

### a) Casos sencillos

Si el modelo considerado contiene sólo funciones lineales (como la distancia recorrida a velocidad constante en función del tiempo, o la diferencia de potencial a través de una resistencia constante en función de la corriente), no tendremos mayor dificultad; la ecuación ya está en forma lineal. Sin embargo, ése raramente es el caso, y enfrentamos casi invariablemente la necesidad de convertir las funciones que encontremos en el modelo a la forma lineal. Ya hemos afrontado ese requerimiento en la sección 4-3. Ahí la función era:

$$t = 0.4515x^{1/2} \quad (\text{en unidades de metros y segundos})$$

y, evidentemente, si queremos representar esta ecuación en la forma lineal:

variable vertical = pendiente  $\times$  variable horizontal + constante  
debemos definir

$$\begin{aligned} \text{variable vertical} &= t \\ \text{variable horizontal} &= x^{1/2} \\ \text{pendiente} &= 0.4515 \end{aligned}$$

y también:

$$\text{constante} = 0$$

Este es un caso sencillo, y con frecuencia no es tan fácil ver cómo una ecuación puede convertirse a la forma lineal. No hay reglas definidas para hacerlo. La mejor manera es tener claro en nuestra mente la forma a la cual queremos llegar:

$$\text{variable vertical} = \text{pendiente} \times \text{variable horizontal} + \text{constante}$$

y ensayar distintas posibilidades con las cantidades de nuestra ecuación original, hasta conseguir la forma requerida. En los problemas al final de este capítulo, se ofrecen oportunidades de práctica al respecto.

Nótese que no hay un resultado único en este proceso. A veces, una ecuación dada puede expresarse en forma lineal de diferentes maneras. Por ejemplo, la ecuación:

$$t = 0.4515x^{1/2}$$

puede emplearse con igual eficacia en cualquiera de estas formas equivalentes:

$$x^{1/2} = \frac{1}{0.4515}t, \quad t^2 = \frac{1}{4.905}x, \quad x = 4.905t^2$$

con las elecciones adecuadas de *variable vertical*, *variable horizontal* y *pendiente*. Hay una cierta tendencia convencional a trazar gráficas con la variable de entrada horizontal y la variable de salida vertical, pero no es un estricto requisito hacerlo así. Debemos escoger la forma de gráfica que mejor sirva a nuestro propósito.

Ese propósito deberá incluir no sólo los requerimientos experimentales básicos (prueba de modelos, etc.), sino también la comodidad y conveniencia del experimentador. Para eso, deberán graficarse las variables tan sencillamente como sea posible. Por ejemplo, considere un experimento para determinar el coeficiente de viscosidad mediante el análisis del flujo de un líquido por un tubo. La ecuación adecuada (ecuación de Poiseuille), es

$$Q = \frac{P\pi a^4}{8\eta\ell}$$

donde  $Q$  = rapidez de flujo

$P$  = diferencia de presión a través del tubo

$a$  = radio del tubo

$\ell$  = longitud del tubo

$\eta$  = coeficiente de viscosidad

En este caso, una opción posible sería graficar  $Q$  vs.  $(\pi a^4/8\ell)P$ , una gráfica cuya pendiente sería igual a  $1/\eta$ . Sin embargo, ésta sería una elección poco inteli-

gente por una serie de razones. En primer lugar, aumenta muchísimo la cantidad de cálculos requeridos para trazar la gráfica, porque cada valor de  $P$  debe de multiplicarse por  $\pi a^4/8\ell$ . En segundo lugar, cada una de las cantidades  $a$  y  $\ell$ , tiene una incertidumbre asociada; si ésta se combina cada vez con la incertidumbre de  $P$ , tendríamos una incertidumbre falsamente acrecentada para la cantidad compuesta (por ejemplo,  $a$  se mediría una sola vez, y su incertidumbre no se debería combinar con la de  $P$ , como si cada vez que midiéramos  $P$ , se combinara otra medición de  $a$  con ella). En este caso, sin duda, el camino más sensato es graficar  $Q$  vs.  $P$ , y usar  $\pi a^4/8\eta\ell$  como la pendiente, evitando así todas las dificultades mencionadas antes. En general, es mejor graficar variables tan sencillas como sea posible, y dejar lo más que se pueda de los cálculos para hacerlos una sola vez al estimar el resultado con la pendiente.

#### b) Uso de las variables compuestas

En muchos casos puede convenirnos (o incluso ser absolutamente necesario) usar variables compuestas. Considere, por ejemplo el llamado “péndulo compuesto”; una lámina rígida de forma arbitraria que se deja oscilar bajo la acción de la gravedad alrededor de un eje perpendicular al plano de la misma [figura 5-1(a)]. El modelo normal de su oscilación (para ángulos pequeños) da el periodo  $T$  como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h^2 + k^2}{gh}}$$

donde  $T$  = periodo de oscilación (variable de salida)

$h$  = distancia del centro de masa al punto de soporte (variable de entrada)

$g$  = aceleración de la gravedad (constante y conocida)

$k$  = radio de giro alrededor del centro de masa (constante y desconocida)

Las formas de esta ecuación con gráfica rectilínea no son inmediatamente obvias, pero es evidente la imposibilidad de ponerla en la forma lineal requerida si escogemos que  $x$  y  $y$  sean funciones sencillas de  $h$  y  $T$ . Sin embargo, es posible la conversión a la forma lineal usando variables compuestas. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2(h^2 + k^2)}{gh}$$

Por tanto

$$T^2h = \frac{4\pi^2(h^2 + k^2)}{g}$$

y

$$h^2 = \frac{g}{4\pi^2} T^2 h - k^2$$

que es lineal, con

$$\text{variable vertical} = h^2$$

$$\text{variable horizontal} = T^2 h$$

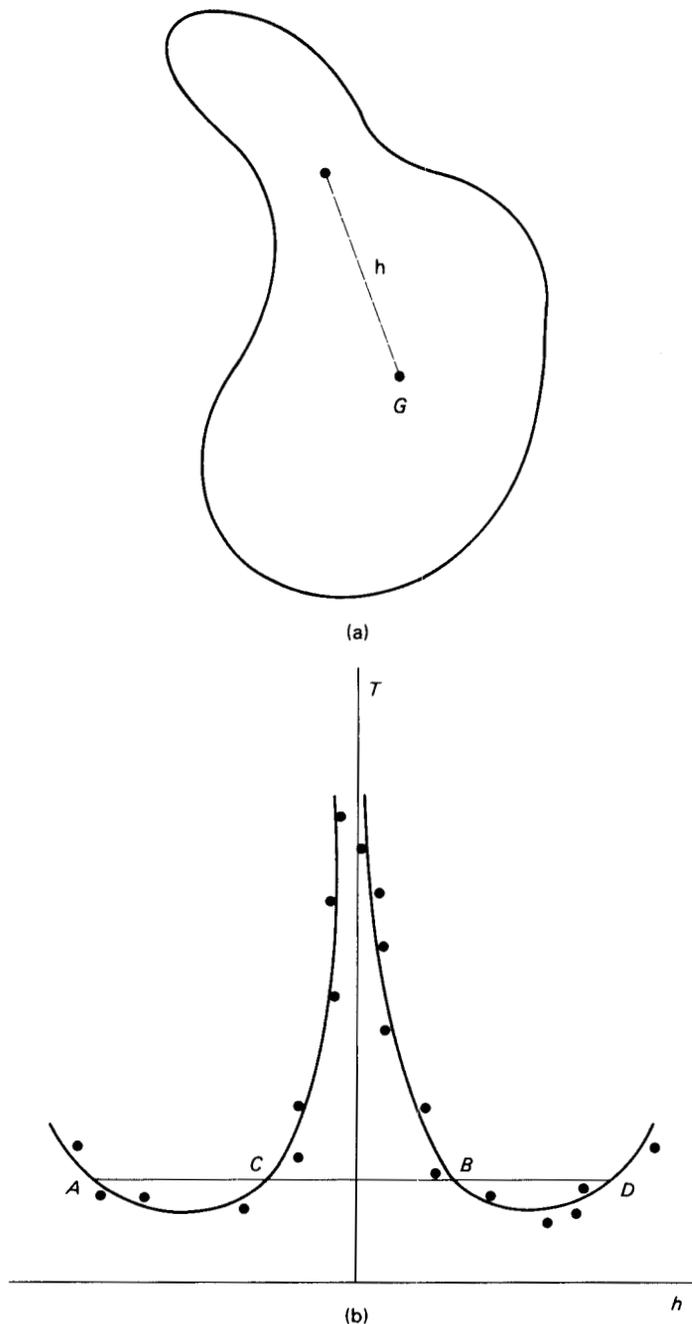
$$\text{pendiente} = \frac{g}{4\pi^2}$$

y

$$\text{ordenada al origen} = -k^2$$

Vale la pena estudiar este ejemplo, ya que ilustra muy claramente la superioridad del análisis lineal sobre otros métodos. Un enfoque comúnmente empleado en este experimento usa la gráfica de  $T$  vs.  $h$ , que se muestra en la figura 5-1(b). Resulta que  $k$  puede obtenerse a partir de las longitudes de las intersecciones  $AB$  y  $CD$ ; si se requiere  $g$ , se tiene que obtener por el cálculo de este valor de  $k$ . Las ventajas de la forma lineal de análisis son claras. Primera: la gráfica de  $T$  vs.  $h$  no da una base para comparar el sistema con el modelo, a menos que se utilice una computadora para dibujar la gráfica de la función  $T(h)$ . Segunda: no se puede obtener una estimación confiable de la incertidumbre del resultado final de esta gráfica, mientras que, por otra parte, la incertidumbre total se puede obtener fácilmente de la gráfica lineal. Tercera: el uso de una intersección en ángulos tan pequeños como los que se ilustran en la figura 5-1(b) es muy poco confiable, ya que cambios pequeños en la colocación de las líneas pueden provocar grandes cambios en la longitud de la porción intersectada; una forma lineal, en contraste, nos permite determinar la pendiente de la gráfica con mucha confiabilidad. Cuarta: el resultado usando el método de intersección se determina únicamente con unos cuantos puntos en la vecindad de las intersecciones, y no obtenemos beneficio alguno de los demás puntos; pero cuando dibujamos una línea recta, todos los puntos pueden contribuir a la elección de una línea. Por último, las gráficas lineales dan  $g$  y  $k$  a partir de mediciones casi independientes sobre la gráfica, mientras que, con el otro método, cualquier inexactitud en el valor de  $k$  se propaga automáticamente al valor de  $g$ .

El uso de las variables compuestas también puede ser conveniente cuando hay dos o más variables de entrada separadas. En tales casos, aun cuando el uso de variables compuestas no sea absolutamente necesario para una gráfica lineal (como fue el caso en el péndulo compuesto), a menudo proporcionan la



**Figura 5-1** El “péndulo compuesto” y la variación de su periodo de oscilación con  $h$ .

forma más elegante y eficaz de trazar nuestras gráficas. Se mencionó antes que, si un sistema incluye dos variables de entrada independientes, podríamos estudiar la variación de la variable de salida con cualquiera de las variables de entrada aislada, mientras se mantiene la otra variable de entrada constante a varios niveles discretos. Por ejemplo, si queremos medir el calor específico de un fluido por calorimetría de flujo continuo, podemos permitir que fluya a una cierta rapidez de flujo másico  $m$ , por un tubo calentado eléctricamente en el cual la rapidez de generación de calor por unidad de tiempo es  $Q$ . La ecuación del balance de calor resultante (despreciando pérdidas, etc.) será:

$$Q = mC \Delta T$$

en donde  $C$  es el calor específico del fluido que queremos medir, y  $\Delta T$  es la diferencia de temperatura entre los extremos de entrada y salida del tubo. Sin duda tanto  $Q$  como  $m$  son controlables por separado, y podemos realizar nuestro experimento estudiando las variaciones de  $\Delta T$  con  $m$ , manteniendo  $Q$  fijo a varios niveles, o podemos estudiar la variación de  $\Delta T$  con  $Q$ , manteniendo  $m$  fijo a varios niveles. Podríamos entonces graficar ya sea  $\Delta T$  vs.  $1/m$ , en cuyo caso las varias pendientes tendrían valores de  $Q/C$ , o  $\Delta T$  vs.  $Q$ , lo que daría las diferentes pendientes como  $mC$ . Sin embargo, existe otra posibilidad: si tratamos el producto  $m \Delta T$  como una variable y lo graficamos contra  $Q$ , obtendremos una gráfica que resume toda nuestra información sobre el sistema al incorporar ambas variables de entrada simultáneamente, ya sea que hayamos controlado los valores de  $m$  o no. En este caso, nuestra pendiente simplemente tendría el valor  $C$ , y tendríamos una forma sencilla de probar el modelo y obtener nuestra incógnita en un solo paso.

Ese uso de las variables compuestas es muy común, y, como antes, la elección de la combinación de variables y el modo de graficarlas pueden adaptarse tanto a la conveniencia del experimentador como a los requerimientos del experimento. Si surgiese alguna dificultad al interpretar las observaciones graficadas empleando variables compuestas (tal vez una dispersión inesperada, o alguna desviación sistemática de la linealidad), siempre podremos obtener información adicional del sistema graficando pares de variables individualmente, más bien que en combinación. Esto frecuentemente ayuda a identificar el origen de la dificultad.

### c) Gráficas logarítmicas

A menudo es deseable, y a veces absolutamente necesario, graficar las variables en forma logarítmica. Por ejemplo, muchos procesos físicos implican funciones exponenciales de la siguiente forma:

$$y = ae^{bx}$$

donde  $y$  y  $x$  son variables medidas y  $a$  y  $b$  son constantes cuyos valores se van a obtener a partir del experimento. La ecuación se puede expresar en forma lineal tomando logaritmos de base  $e$  en ambos lados:

$$\log_e y = \log_e a + bx$$

De este modo, si graficamos  $\log_e y$  en el eje vertical y  $x$  en el horizontal (lo que se conoce como "gráfica semilogarítmica"), nuestro modelo dará una línea recta. La pendiente nos dará el valor de  $b$ , y la ordenada al origen el valor de  $\log_e a$ . Nótese que, si se toman logaritmos de base 10 en lugar de base  $e$ , sólo se afecta la ordenada al origen, y eso puede ser conveniente si sólo estamos interesados en la pendiente.

El uso de tales gráficas logarítmicas es muy común, debido a la frecuente ocurrencia de funciones exponenciales en los modelos de procesos físicos y químicos. Pero, además, las gráficas logarítmicas se usan incluso para simples funciones algebraicas. Considere, por ejemplo, la función

$$y = x^2$$

Tomando logaritmos de ambos lados, ya sea de base 10 o de base  $e$ , obtenemos:

$$\log y = 2 \log x$$

Esta ecuación es lineal, con:

$$\begin{aligned} \text{variable vertical} &= \log y \\ \text{variable horizontal} &= \log x \\ \text{pendiente} &= 2 \end{aligned}$$

Así pues, una dependencia funcional, como la de un simple cuadrado, se puede probar usando esas gráficas logarítmicas (que se conocen como "gráficas log-log").

Pero, ¿cuál sería la ventaja de ese tipo de representación comparada con graficar, como hemos recomendado hasta ahora,  $y$  vs.  $x^2$ ? Una respuesta obvia es que nos permite trazar, en una hoja de papel de dimensiones razonables, variaciones que serían muy extensas para una graficación convencional con escalas lineales. Se puede graficar convenientemente en una sola hoja de papel un intervalo de una potencia de 10 en nuestras observaciones; un alcance sobre un factor de 100 resulta muy difícil, y un factor de 1000 hace prácticamente imposible una graficación satisfactoria. Para alcances tan grandes como éstos de nuestras variables, sólo la gráfica logarítmica permite una presentación realista de los resultados.

Una segunda ventaja de las gráficas logarítmicas tiene que ver con la potencia de la función. Si nuestro sistema se comporta de manera que la función

$$y = x^{1.8}$$

sería mejor modelo que  $y = x^2$ , ese hecho probablemente se nos escaparía si graficáramos  $y$  vs.  $x^2$ . Simplemente obtendríamos un conjunto de puntos que se desvían de una línea recta, y el origen de la discrepancia no sería inmediatamente obvio. Por otro lado, la gráfica log-log nos seguiría dando una línea recta. Esto significaría que una función que incluya una potencia seguirá siendo un buen modelo. Por supuesto, la pendiente de la línea no sería 2, y el valor mejorado del exponente, 1.8, se obtendría de la pendiente de la gráfica log-log. Más adelante (en el capítulo 6) consideraremos los usos de la gráfica log-log para la construcción de modelos empíricos que incluyen esas potencias. Por el momento, baste señalar que, en la etapa del diseño de un experimento, la posibilidad de graficación semilogarítmicas o log-log debe tenerse en mente, ya sea que el tipo de función o el margen de variación de las variables sugieran que es la adecuada.

### 5-3 PLANEACION DE EXPERIMENTOS

Enumeraremos ahora los pasos reales, prácticos, con los cuales nos preparamos para hacer el experimento. Estos le podrán parecer tediosos a alguien cuya ambición sea avanzar en el experimento tan rápido como sea posible, y preocuparse después de qué hacer con los resultados. De hecho, para muchos de los experimentos sencillos que se encuentran comúnmente en los laboratorios de enseñanza, el minucioso cuidado que vamos a recomendar podrá parecer ocioso y pedante. Pero debemos recordar que los sencillos experimentos de los laboratorios de instrucción son meras simulaciones, en una forma adecuadamente simplificada, de las situaciones mucho más complejas y decisivas que nos encontraremos más tarde en los sistemas reales. Si en un primer laboratorio de física olvidamos medir el diámetro de un alambre al efectuar un experimento de elasticidad, probablemente eso no importe mucho; podemos regresar más tarde al laboratorio y cumplir con la medición faltante y, aunque no lo hiciéramos, no se acabaría el mundo. Pero, si diez años más tarde estamos planeando hacer algún experimento sobre astronomía de rayos X en una nave espacial, y nos damos cuenta hasta que nuestro experimento esté en órbita de que hemos olvidado medir alguna característica esencial del detector, habremos desperdiciado el costoso complejo espacial de alguna organización y no seremos precisamente populares. Debemos de adquirir lo más pronto posible

el hábito de la planeación meticulosa y concienzuda de nuestros experimentos, aun si, por ahora, pueda parecer a veces superflua.

Los pasos de la planeación son los que siguen:

a) Identificar el sistema y el modelo

Esto puede parecer algo trivial, pero es mejor tener claro desde el principio cuál es el tema de nuestro experimento. Por ejemplo, en el experimento del balón que cae, ¿nos vamos a preocupar por la resistencia del aire o no? Si decidimos ignorarla, no estamos siendo irresponsables; estamos únicamente definiendo un aspecto de nuestro modelo. Si ésta es una buena decisión o no, se aclarará después con el experimento mismo. Si el comportamiento del sistema resulta estar en correspondencia con el comportamiento del modelo al nivel de precisión que practicamos, podremos sentirnos satisfechos de que no tenía caso perder el tiempo en efectos pequeños. Si elegimos una opción insatisfactoria, nuestros resultados experimentales nos indicarán muy pronto la necesidad de reconsiderar el punto. Así que, desde el principio, debemos determinar los límites del sistema y del modelo, y proceder a probar la situación.

b) Elegir las variables

Normalmente alguna magnitud en el experimento se presentará como la elección obvia para una variable de salida. Si hay sólo una variable de entrada, no hay problema. Si hay varias variables de entrada, debemos tratar de identificar una como la variable independiente principal, y variar las otras en niveles discretos.

c) Linealizar la ecuación

Las ecuaciones que representan el comportamiento del modelo deben expresarse ahora en una forma en la que su gráfica sea una línea recta, según se describe en la sección 5-2. Como ya hemos mencionado, no hay una elección única y correcta para la forma lineal. Escogemos una forma que sirva a nuestros propósitos de manera conveniente y eficaz. Por ejemplo, si nuestra ecuación incluye alguna cantidad desconocida cuyo valor se va a determinar en el experimento, probablemente sea mejor usar una forma de línea recta que tome la incógnita como pendiente. Es posible, por supuesto, determinar cantidades desconocidas a partir de la ordenada al origen, pero, debido a que las ordenadas al origen pueden estar sujetas frecuentemente a errores que surgen de los defectos del instrumento o de otros errores sistemáticos, en general es preferible obtener nuestras incógnitas de las pendientes. Si la ecuación contiene dos

incógnitas, probablemente sea mejor encontrar una forma que nos permita obtener una incógnita a partir de la pendiente y la otra, de la ordenada al origen.

d) **Elegir el alcance de las variables**

Antes de empezar las mediciones mismas, debemos decidir sobre los intervalos en que esperamos hacerlas. Por lo común, es mejor planear un intervalo para la variable de entrada de por lo menos un factor de 10. Cuanto mayor sea, mejor, y un alcance menor a menudo puede dar una base insatisfactoria para comparar el comportamiento de los sistemas y los modelos. Obviamente no podemos escoger directamente el intervalo de valores de las variables de salida: el sistema mismo nos dará esos valores. Sin embargo, todavía debemos ser cuidadosos. Puede haber límites de los instrumentos más allá de los cuales puede ocurrir un daño, por ej.: límites elásticos, calentamiento excesivo de resistores de precisión, sobrecarga de medidores y otros instrumentos. Hacer mediciones de prueba meticulosas nos permitirá determinar el intervalo de variables de entrada que impide que sobrecarguemos cualquier parte del sistema. Este es el momento de considerar cuidadosamente todos los aspectos de las especificaciones de los instrumentos. Por ejemplo, ¿tiene marcada encima la caja de resistencia la corriente máxima permitida para cada escala? Si es así, la incorporamos en la elección del alcance de las variables. Si no, vamos a buscar esos valores en el catálogo. En todo caso, debemos asegurarnos de que los límites se identifiquen y se observen. Será demasiado tarde cuando el olor de aislante quemado y una columna de humo azul llamen nuestra atención hacia las fragilidades de los aparatos de medición física, y el costo de su reemplazo.

e) **Determinar la precisión del experimento**

No debemos emprender un experimento sino hasta que tengamos una idea general de la precisión que esperamos lograr en el resultado final. Eso no quiere decir que podamos garantizar un nivel de precisión terminal, pero sí que debemos tener una cifra como meta que nos guíe para elegir nuestros métodos de medición. Por ejemplo, la petición de “Medir la aceleración de la gravedad usando un péndulo”, en sí misma prácticamente carece de sentido. En respuesta a esta solicitud podríamos invertir diez minutos con aparatos burdos y obtener un resultado con una precisión del 10%, o bien, pasar semanas enteras con equipo refinado y costoso y lograr el 0.01%. Sólo podemos tener una impresión realista de lo que se espera con un requerimiento como el de “Medir  $g$  usando un péndulo simple, con una aproximación del 2% y tratando de no emplear más de dos horas en ello”. La cifra del 2% nos da una idea general de la clase de mediciones que se nos pide hacer.

Deberíamos tener un objetivo como ése en mente para cada experimento; ello serviría como base para proceder a un diseño realista de nuestro experi-

mento. Podemos intentar asegurarnos de que, por una parte, todas nuestras mediciones sean de suficiente precisión para contribuir con provecho al resultado final, y, por otra, no perder tiempo y esfuerzo haciendo mediciones con una precisión muy por encima de la que se requiere.

Para ver cómo puede llevarse a cabo tal diseño, volvamos al ejemplo del péndulo y nuestra expectativa de incertidumbre del 2% en el valor de  $g$ . Sabemos que el resultado para  $g$ , aunque se obtendrá gráficamente, en esencia involucra mediciones de  $\ell$  y de  $T$  (bajo la forma de  $T^2$ ). Si la incertidumbre en cualquier medida ya sea de  $\ell$  o de  $T^2$  excede el 2%, hay pocas probabilidades de que ésta contribuya ventajosamente a una determinación de  $g$  con aproximación del 2%. Supongamos que, como primera aproximación, elegimos restringir la incertidumbre tanto de  $\ell$  como de  $T^2$  para que estén incluidas en el 1%; ¿cuáles son las implicaciones que esto tiene para las mediciones de  $\ell$  y de  $T$ ? Nuestro primer paso debe ser, haciendo mediciones de prueba, asegurar la incertidumbre absoluta con la que podemos hacer las mediciones de  $\ell$  y de  $T$ . Una vez que hayamos determinado estas incertidumbres, podemos encontrar los límites de los alcances de las medidas de  $\ell$  y de  $T$  que permitirán que la precisión sea aceptable. Vamos a suponer que, con los aparatos disponibles, pensamos que podemos medir longitudes con una incertidumbre absoluta de  $\pm 1$  mm. ¿Cuál es la longitud para la cual esto da una precisión del 1%?

$$\frac{0.1}{\ell} = 0.01 \quad (\ell \text{ en cm})$$

Por tanto:

$$\ell = 10 \text{ cm}$$

Así, mientras nuestras longitudes sean mayores de 10 cm, la contribución a la incertidumbre total de  $\ell$  está dentro de límites aceptables, y hemos identificado un límite en el alcance aceptable de  $\ell$ .

¿Cuáles son las implicaciones para  $T$ ? Si vamos a asignarle una precisión del 1% a  $T^2$ , necesitamos un 0.5% en  $T$ . El periodo de oscilación se determinará midiendo el tiempo para un número especificado de oscilaciones con algún tipo de temporizador o de cronómetro. Vamos a suponer que estamos utilizando un cronómetro que (como podemos comprobar intentando la medición en la práctica), nos permite medir el tiempo de un cierto número de oscilaciones con una aproximación de  $\pm 0.2$  seg. Nótese que esta cifra de 0.2 seg debe ser la incertidumbre global en todo el proceso de medición del tiempo, comprendida nuestra apreciación personal de la posición del péndulo para apretar el botón, los tiempos de respuesta para reaccionar, etc.; no es suficiente considerar sólo

la incertidumbre de la lectura de la manecilla estacionaria del cronómetro. En todo caso, si tenemos una incertidumbre global en la medición del tiempo de  $\pm 0.2$  seg, podemos calcular la precisión de cualquier intervalo medido,  $t$ , como  $0.2/t$ . Esta es la cantidad que deseamos restringir a valores inferiores a 0.5%, por lo que la condición limitante es:

$$\frac{0.2}{t} = 0.005$$

Luego, el valor limite de  $t$  está dado por

$$t = \frac{0.2}{0.005} = 40 \text{ seg}$$

Esto es, suponiendo que escogemos el número de oscilaciones del péndulo de manera que siempre estemos midiendo tiempos mayores de 40 seg, podemos esperar que nuestras medidas contribuirán efectivamente a una determinación final de  $g$  dentro del 2%. Por supuesto que no podemos garantizar que ese plan experimental resultará en un valor de  $g$  con una incertidumbre menor del 2%; siempre existe la posibilidad de contribuciones inesperadas a la incertidumbre o de un error sistemático insospechado. Pero, al menos, podemos evitar hacer mediciones que no tengan posibilidad alguna de contribuir provechosamente al resultado final.

En esta etapa debemos reflexionar sobre si cada medición se va a considerar en términos de un intervalo estimado de incertidumbre, o si las fluctuaciones al azar son lo suficientemente grandes para requerir el uso de métodos estadísticos. Si este último es el caso, algunas mediciones de prueba nos permitirán hacer una estimación preliminar de la varianza, con lo que podremos escoger el tamaño de muestra que se necesita para lograr la precisión requerida. En esta etapa debemos recordar las advertencias sobre la inexactitud en las muestras pequeñas que se dieron en la sección 3-11. Pero, además debemos recordar que los intentos para mejorar la precisión aumentando el tamaño de la muestra pueden ser ingratos. La expresión para la desviación estándar de la media involucra a  $\sqrt{N}$ , de modo que si una muestra de prueba de 10 mediciones sugiere que sea deseable, digamos, un aumento de diez veces en la precisión, el tamaño de la muestra tendría que aumentarse en un factor de 100. Un tamaño de muestra de 1000 puede no ser factible, y tendríamos que buscar algún otro camino hacia el aumento de la precisión.

Ya sea que las mediciones sean de naturaleza estadística, o que tengan una incertidumbre estimada, sencilla, será posible decidir en esta etapa si cada medición en el experimento puede hacerse en forma satisfactoria o no. Si al parecer alguna medida está restringida a una incertidumbre que excede nuestras

aspiraciones de diseño, debemos obtener un método más preciso de medir esa cantidad particular, o, si eso no es posible, reconocer que nuestro límite anterior para la incertidumbre final del experimento era irrealizable con los aparatos disponibles, y que será necesaria la revisión de ese límite. Asimismo, evaluando la contribución de cada magnitud en el experimento a la incertidumbre final, podremos identificar cualquier medida (o medidas) que contribuyan decisivamente al resultado final, ya sea por su baja precisión intrínseca, o por la forma en que entra en los cálculos (p. ej.: alguna cantidad elevada a una potencia alta, o una cantidad que se tiene que obtener como la diferencia de dos valores medidos). Una vez que se identifiquen, se les puede dar una especial atención a esas medidas para que su incertidumbre se mantenga bajo control al máximo posible.

Todo el detalle descrito en esta sección puede parecer que constituye un enfoque innecesariamente exigente para un experimento pequeño y sencillo, pero es conveniente recordar, una vez más, que nos estamos ejercitando para experimentos de mucho mayor envergadura e importancia, en los que las consecuencias de una falta de planeación adecuada pueden ser graves y costosas.

#### f) Elaborar el programa de medición

Después de determinar las variables, los alcances y la precisión del experimento, lo ideal es concluir su diseño elaborando un programa de medición completo y explícito. Este normalmente tomará la forma de una tabla que incluye todas las cantidades por medir en el experimento, y que proporciona también espacio para cualquier cálculo requerido para dibujar las gráficas. Un programa de medición completo permitirá al experimentador, durante el transcurso del experimento, concentrarse en la conducción real del experimento. Mientras se manipulan aparatos y se hacen mediciones, normalmente hay bastante que hacer sin la necesidad continua de decidir qué hacer después. El programa de medición ayudará también a resguardarse de la omisión accidental de alguna medición significativa, que podría pasarse por alto a resultas de la presión de la misma experimentación.

Como ya hemos observado reiteradamente, toda esta planeación podrá parecer como una bulla excesiva e innecesaria para un experimento sencillo. Sin embargo, estas recomendaciones representan nada menos que el mínimo básico de preparación para cualquier experimentación seria, y no debe perderse oportunidad alguna para la formación temprana de hábitos cuidadosos de diseño y planeación de experimentos. Es importante evitar la tentación de apresurarse a seguir con el experimento, dejando hasta después la tarea de decidir qué hacer con los resultados; es mucho más benéfico adquirir el hábito de re-

servar el tiempo necesario para diseñar y planear el experimento adecuadamente antes de empezar las mediciones en sí.

#### 5-4 DISEÑO DE EXPERIMENTOS CUANDO NO EXISTE UN MODELO

Esta situación se presenta cuando, por ejemplo, estamos observando algún fenómeno tan nuevo que todavía no se ha construido un modelo teórico al respecto, o bien nos ocupamos de un sistema que es tan complejo, como un sistema de ingeniería o algún aspecto de la economía nacional, que acaso nunca sea posible construir un modelo teórico de él. Si no tenemos un modelo existente para probarlo, nuestro objetivo al experimentar con el sistema podría tener diversas modalidades. Podríamos estar motivados por la simple curiosidad o por una necesidad práctica de información sobre el sistema. A un nivel superior, quizás nos interesen las posibilidades de construir modelos. Podemos estar buscando una guía para la construcción de un modelo teórico, o, si esto resulta muy difícil, desear obtener mediciones que sirvan de base para un modelo puramente empírico del sistema. Como se mencionó en el capítulo 4, los modelos empíricos, aun si no se tiene una comprensión teórica detallada, son sumamente útiles. Pueden servir para sistematizar lo que pensamos de un sistema complejo, y con frecuencia son esenciales para cálculos matemáticos sobre el sistema como la interpolación, la extrapolación, el pronóstico, etc.

Cualquiera que sea nuestra motivación, probablemente nos gustaría encontrar una función o gráfica que proporcione un ajuste suficientemente bueno para las observaciones. Los métodos para encontrar funciones adecuadas se describirán en el capítulo 6, y nos restringiremos por el momento al problema de diseñar el experimento. A falta de un modelo existente, el diseño del experimento puede ser relativamente directo, especialmente si podemos aislar las variables de entrada de modo que podamos variar una mientras mantenemos fijos los valores de las otras. Nuestro diseño del experimento consistirá, simplemente, en medir la variable de salida en intervalos adecuados de las variables de entrada para construir una imagen del comportamiento del sistema tan completa como sea posible. Por supuesto, si no podemos aislar las variables de entrada, tendremos problemas, y ese caso se considerará en la sección 5-7.

Aun si no contamos con una teoría previa acerca del fenómeno, es sensato aprovechar cualesquier sugerencia disponible sobre funciones que pueda ser adecuada a nuestro sistema, y comprobar esa posibilidad en el comportamiento del mismo. Una forma de obtener esas sugerencias, se presentará en la sección siguiente.

## 5-5 ANALISIS DIMENSIONAL

Aunque no exista una teoría completa de un fenómeno físico, todavía es posible obtener una provechosa orientación para la realización de un experimento mediante el método del análisis dimensional. Las “dimensiones” de una cantidad física (mecánica) son su expresión en términos de las cantidades elementales de longitud, masa y tiempo, abreviadas como  $L$ ,  $M$  y  $T$ . Así, por ejemplo, la velocidad tiene dimensiones de  $LT^{-1}$ ; la aceleración,  $LT^{-2}$ ; la densidad,  $ML^{-3}$ ; la fuerza (igual a masa  $\times$  aceleración),  $MLT^{-2}$ ; el trabajo (igual a fuerza  $\times$  distancia),  $ML^2T^{-2}$ , etc.

El principio empleado en el análisis dimensional se basa en el requisito de que las dimensiones finales en los dos lados de una ecuación deben de corresponder. De esta manera, si sabemos que  $g$  está relacionada con la longitud y el periodo de un péndulo, es obvio que la única forma de que la  $LT^{-2}$  de la aceleración en el lado izquierdo pueda compensarse del otro lado es incorporando la longitud a la primera potencia (para obtener la  $L$ ), y dividiendo entre el periodo al cuadrado (para proporcionar  $T^{-2}$ ). En seguida, pues, podemos afirmar que, independientemente de la forma teórica final de la ecuación, ésta debe tener la estructura

$$g = (\text{constante adimensional}) \times \left( \frac{\text{longitud}}{\text{periodo}^2} \right)$$

Adviértase que el proceso no puede dar información sobre constantes adimensionales (números puros como  $\pi$ , etc.), y por eso siempre debemos incluir la posibilidad de su presencia en las ecuaciones obtenidas por análisis dimensional.

El método general es como sigue: considérese una cantidad  $z$  que se supone es función de las variables  $x$ ,  $y$ , etc. Escribimos la relación en la forma

$$z \propto x^a y^b \dots$$

donde  $a$  y  $b$  representan potencias numéricas a las cuales se tendrán que elevar  $x$  y  $y$ . Ahora escribimos las dimensiones del lado derecho en términos de las dimensiones de  $x$  y  $y$  y las potencias  $a$  y  $b$ . En segundo lugar, establecemos como condición que la potencia final de la dimensión  $M$  en el lado derecho debe ser igual a la potencia que conocemos de  $z$ . Hacemos lo mismo con  $L$  y  $T$ , obteniendo así tres ecuaciones simultáneas que nos permiten calcular los valores de  $a$ ,  $b$ , etc.

Como ejemplo, consideremos la velocidad de propagación  $v$  de las ondas transversales en una cuerda. Podríamos suponer que esa velocidad estará determinada por la tensión  $T$  en la cuerda y su masa por unidad de longitud,  $m$ . Escribimos:

$$v \propto T^a m^b$$

Las dimensiones adecuadas son:

$$\begin{aligned} \text{de } v: & & LT^{-1} \\ \text{de } T \text{ (fuerza):} & & MLT^{-2} \\ \text{de } m \text{ (masa por unidad de longitud):} & & ML^{-1} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} LT^{-1} &= (MLT^{-2})^a (ML^{-1})^b \\ &= M^{a+b} \times L^{a-b} \times T^{-2a} \end{aligned}$$

Entonces, comparando una por una las potencias de  $M$ ,  $L$  y  $T$  en los dos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{para } M: & \quad 0 = a + b \\ \text{para } L: & \quad 1 = a - b \\ \text{para } T: & \quad -1 = -2a \end{aligned}$$

para lo cual las soluciones son obviamente:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

y obtenemos, finalmente:

$$v = (\text{constante adimensional}) \times \sqrt{\frac{T}{m}}$$

Este procedimiento es muy valioso, porque aun sin contar con una teoría fundamental detallada, proporciona una predicción relativa al comportamiento del sistema. Ese puede ser un punto de partida para la investigación experimental, y si el experimento muestra consistencia entre el comportamiento del sistema y el modelo producido por el análisis dimensional, tendremos una confirmación de la validez de la elección original relativa a las variables. Si el experimento muestra una discrepancia, debemos observar de nuevo nuestras primeras suposiciones sobre las cantidades que influyen en el experimento. Nó-

tese que en el ejemplo anterior obtuvimos tres ecuaciones para sólo dos incógnitas. Por tanto, la situación en realidad estaba excesivamente determinada, y tuvimos la fortuna de que las ecuaciones que contenían  $a$  y  $b$  fueron consistentes. Si no lo hubieran sido, habríamos sabido inmediatamente que nuestra suposición relativa a los constituyentes de  $v$  era errónea.

Por muy poderoso que sea este método, desde luego surgirán dificultades cuando la magnitud bajo estudio sea función de más de tres variables. Entonces tendremos más de tres potencias desconocidas, pero sólo tres ecuaciones a partir de las cuales determinarlas. En este caso, no es posible una solución única, pero se puede encontrar una solución parcial en términos de combinaciones de variables.

Por ejemplo, consideremos la rapidez de flujo  $Q$  de un fluido de coeficiente de viscosidad  $\eta$  por un tubo de radio  $r$  y longitud  $\ell$  bajo una diferencia de presión  $P$ . Es claro que todas estas cantidades son significativas para determinar la rapidez de flujo, y por ello cabe sugerir la relación:

$$Q \propto P^a \ell^b \eta^c r^d$$

Las dimensiones de esas cantidades son como sigue:

$$Q \quad (\text{volumen por unidad de tiempo}): L^3 T^{-1}$$

$$P \quad (\text{fuerza por unidad de área}): MLT^{-2} \times L^{-2} = ML^{-1} T^{-2}$$

$$\ell \quad (\text{longitud del tubo}): L$$

$$\eta \quad (\text{coeficiente de viscosidad, definido como fuerza por unidad de área por unidad de gradiente de velocidad}):$$

$$(MLT^{-2})(L^2)^{-1}(LT^{-1} \times L^{-1})^{-1} \\ = ML^{-1} T^{-1}$$

$$r \quad (\text{radio del tubo}): L$$

De este modo:

$$L^3 T^{-1} = (ML^{-1} T^{-2})^a L^b (ML^{-1} T^{-1})^c L^d$$

Y, comparando potencias de

$$M: \quad 0 = a + c$$

$$L: \quad 3 = -a + b - c + d$$

$$T: \quad -1 = -2a - c$$

Aquí tenemos cuatro incógnitas y sólo tres ecuaciones, así que, en general, no es posible una solución completa. Sin embargo, podemos obtener parte de ella, porque es obvio que las ecuaciones para  $M$  y  $T$  nos dan:

$$a = 1$$

$$c = -1$$

Por tanto, la ecuación de  $Q$  debe contener el factor  $P/\eta$ . La parte restante de la solución puede escribirse sólo como

$$b + d = 3$$

Pero, al reexpresarla como

$$d = 3 - b$$

podemos ver que  $Q$  debe contener el producto  $r^3/r^b$ ; también que contiene  $\ell^b$ , por lo que tenemos

$$Q \propto \frac{P}{\eta} \times r^3 \times \left(\frac{\ell}{r}\right)^b$$

Como es inconcebible que  $Q$  aumente con  $\ell$ , si todas las demás cantidades permanecen constantes, es evidente que  $b$  debe tener un valor negativo, y podemos invertir el factor  $\ell/r$  para obtener, finalmente:

$$Q \propto \frac{P}{\eta} \times r^3 \times \left(\frac{r}{\ell}\right)^b$$

La cantidad  $b$  sigue siendo desconocida, y eso es lo más que el análisis dimensional nos puede acercar a la solución completa. Sin embargo, aun esta solución parcial puede servir de guía para experimentar en una situación para la que no exista una teoría fundamental previa. El análisis dimensional puede ampliarse para abarcar magnitudes térmicas y eléctricas, pero en esos casos surgen las ambigüedades y requieren una consideración especial. El análisis respectivo podrá encontrarse en los textos convencionales sobre calor y electricidad, o en textos especializados de análisis dimensional.

## 5-6 MEDICIONES DEL TIPO DE DIFERENCIAS

En todas las secciones anteriores hemos supuesto que había una relación clara y definida entre las variables de entrada y las de salida, y que las variables de entrada mismas eran fácilmente identificables y estaban relativamente bien

controladas. Sin embargo, enfrentamos a veces circunstancias en las que no somos tan afortunados. Tal vez nuestras variables de entrada no se puedan aislar claramente, de manera que, cuando todas están variando al mismo tiempo, es difícil identificar el efecto de cada una en la salida del sistema. O tal vez el sistema es tan complejo y está sujeto a tantos factores variables que resulta difícil juzgar si el efecto en el que estamos interesados siquiera existe. Para afrontar circunstancias como éstas, se han ideado ya muchas técnicas experimentales, en su mayoría de naturaleza estadística. Las descripciones de esas técnicas pueden consultarse en los textos de estadística citados en la Bibliografía. Para nuestros propósitos actuales, nos restringiremos a una breve descripción de los problemas que surgen en diferentes niveles de complejidad e incertidumbre.

a) Experimentos de medición de diferencias en las ciencias físicas

Supongamos, por ejemplo, que deseamos estudiar algún efecto relativamente pequeño, como la extensión de un alambre de acero duro con la aplicación de una carga. No sólo es pequeño el efecto, sino que también está sujeto a una serie de factores que lo perturban; la temperatura, por ejemplo. Por tanto, si medimos simplemente la extensión bajo un cierto peso sin garantizar la estabilidad de temperatura, no podemos estar seguros de que la extensión que midamos se pueda atribuir únicamente a la influencia en la que estamos interesados, es decir, al peso. Y no sólo eso, pues sí, además, no nos es posible controlar efectivamente la temperatura, nunca podremos estar seguros del efecto del peso en el alambre. La solución es una medición de “efecto-nulo”. Si medimos simultáneamente la longitud de dos muestras, una con peso y la otra libre, cabe esperar que la diferencia en su comportamiento se atribuya a la magnitud en que estamos interesados, en este caso el peso. Por supuesto, debemos tratar de asegurarnos de que, hasta donde sea posible, las dos muestras sean idénticas, que estén sujetas a las mismas influencias, como la temperatura, y que difieran en un solo aspecto: el peso aplicado a ellas.

Afortunadamente tal correspondencia no es muy difícil de lograr si estamos hablando de alambres de acero. Podemos estar cerca de hacer que la situación de los dos alambres sea idéntica montándolos muy cerca uno del otro (para hacer mínimas las diferencias de temperatura entre ellos) y tomando otras precauciones semejantes. Y, como queremos que las propiedades originales de las dos muestras sean tan aproximadamente idénticas como sea posible, podemos simplemente tomar un tramo de alambre y partirlo en dos, haciendo que un pedazo sea la muestra que se va a cargar y el otro la muestra de comparación que indicará el efecto nulo. Nuestra capacidad de cortar la muestra en dos partes nos permite realizar convenientemente una gran variedad de mediciones del tipo de diferencias, y obtener una alta precisión en la detección de efectos pequeños, que de otra manera quedarían ocultos sin remedio por los

factores de perturbación. Esta experimentación del tipo de medición de diferencias es muy común, y se encontrará en toda la gama de fenómenos físicos.

Con frecuencia terminamos errando, a menos que verifiquemos el desempeño de nuestro sistema experimental *en ausencia* de la influencia que estamos estudiando, así como en su presencia. A veces, incluso, los resultados nos sorprenden, y haríamos bien en seguir el consejo de Wilson (véase la Bibliografía), y reflexionar sobre esta afirmación: “Por numerosos experimentos se ha probado en forma concluyente que el golpear tambores y gongs durante un eclipse solar provoca que el brillo del sol regrese”.

#### b) Experimentos de medición de diferencias en las ciencias biológicas

Al ilustrar las mediciones de efecto nulo usando el alargamiento de un alambre de acero bajo el efecto de un peso, nos hemos topado con un aspecto muy útil: para garantizar la semejanza de la muestra experimental y la muestra de comparación, tomamos nuestra muestra básica y la dividimos en dos. En el caso de alambres de acero y otros materiales semejantes, eso no presenta problemas. Sin embargo, otros sistemas no se prestan con la misma facilidad.

Supongamos que deseamos medir la efectividad de un nuevo medicamento para un tipo particular de enfermedad. Es claro que tendría muy poco valor si no hiciéramos otra cosa que sólo administrar el medicamento a un paciente que sufre la enfermedad y vigilar si hay mejoría. Hay demasiadas variables y factores perturbadores para que podamos atribuir con fiabilidad cualquier cambio en la condición del paciente al medicamento. Si queremos aislar el efecto de la medicina sola, es claro que trataríamos de diseñar algún tipo de experimento de diferencias, en el que observaríamos el efecto nulo así como la influencia del medicamento. Una situación como ésta, empero, presenta dificultades obvias que no se encuentran al experimentar con alambres de acero. La renuencia de la mayoría de los seres humanos a ser partidos en dos imposibilita el crear una auténtica muestra de efecto nulo. Podríamos aprovechar a una segunda persona como muestra de efecto nulo, pero enfrentaríamos inmediatamente toda la variabilidad de respuesta que procurábamos evitar al emplear muestras idénticas.

Enfrentados a lo inevitable de la variabilidad biológica, nuestro único recurso consiste en compensarla con el aumento del número. Desistimos de nuestros intentos por experimentar con sujetos individuales y conformamos un grupo experimental, expuesto a la influencia que se estudia, y un grupo “de control”. El grupo de control se forma de modo que sea tan estrechamente comparable con el grupo experimental como sea posible, y que difiera sólo en que no recibirá el tratamiento que constituye el tema de la investigación. Espe-

ramos que esté expuesto a todas las influencias perturbadoras que afectan al grupo experimental, que responda a ellas del mismo modo que ese grupo y, por tanto, que proporcione la medición del efecto-nulo buscada.

Acaso haga falta incluir muchos refinamientos en este tipo de experimentación, porque los efectos que buscamos medir a menudo pueden ser muy pequeños en comparación con todas las influencias perturbadoras. Por ejemplo, para disminuir las distorsiones subconscientes de los resultados en experimentos médicos sobre sujetos humanos, es común ofrecer a los integrantes de un grupo en control un sustituto inocuo de la sustancia real administrada al grupo experimental (un “placebo”), al tiempo que se mantiene tanto a los experimentados como a los sujetos bajo estudio, en la ignorancia respecto de a quién se administra la sustancia real y a quiénes la simulada (el llamado experimento “doblemente a ciegas”).

Los diseños experimentales que incluyen un grupo experimental y un grupo de control cuidadosamente equiparado, son prácticamente universales en los estudios biológicos, ya sea que estemos tratando de medir la posible característica carcinógena de algún colorante alimenticio en grandes grupos de desafortunados ratones, o los efectos benéficos de las actividades musicales en el desempeño académico de los alumnos de escuelas primarias.

## 5—7 EXPERIMENTOS SIN CONTROL SOBRE LAS VARIABLES DE ENTRADA

A veces tenemos que diseñar un proceso para estudiar algún sistema sobre el cual no tenemos control alguno. Si éste es el caso, no nos queda otra alternativa que la observación simple y sin manipulación del sistema, y nuestra tarea consiste en diseñar el proceso de observación (tal vez no tengamos justificación para llamarlo un experimento) para optimizar nuestras oportunidades de comparación efectiva entre las propiedades del sistema y las de cualquier modelo que tengamos en mente. En los casos de una conducta claramente definida del sistema y de modelos bien definidos, puede ser que no afrontemos mayor dificultad. Por ejemplo, un astrónomo puede sufrir la frustración de su incapacidad de influir en la materia de su experimento, pero su sistema normalmente funciona de una manera bien definida, permitiendo con frecuencia mediciones sumamente exactas. De esta manera, no es muy difícil decidir que la teoría de la relatividad general de Einstein se ajusta a las observaciones de la órbita del planeta Mercurio mejor de lo que ocurre con la teoría de la gravitación de Newton.

En otros casos, sin embargo, las preguntas que nos hacemos pueden ser más difíciles de contestar. Por ejemplo: ¿Ha alterado la calidad de un producto la introducción de un nuevo detalle en la manufactura o no? Aun cuando todo lo demás en el proceso de manufactura se mantenga tan constante como sea posible, la observación demostrará que el producto varía de una muestra a otra; ¿oculta esta variación el efecto en el que estamos interesados o no? En tales casos, sin tener control sobre las variables de entrada, nuestro estudio se convierte en un ejercicio de procedimientos de muestreo, y existe todo un campo de investigación industrial con el nombre de control de calidad. La literatura sobre estadística y diseño estadístico de experimentos es muy amplia, pero algunos de los textos enumerados en la Bibliografía proporcionarán un punto de partida.

Con todo, aun los procesos industriales, con sus fluctuaciones inherentes y su falta de control sobre las entradas, plantean problemas que son sencillos en comparación con algunos de los problemas cuya solución buscamos hoy día. Por ejemplo: ¿Mejora la adición de fluoruros a los suministros de agua de las ciudades la salud dental de la población, y produce, acaso, otros efectos, posiblemente dañinos? ¿Causan las plantas nucleoelectricas una mayor incidencia de leucemia en su vecindad o no? En tales casos, tenemos casi todos los problemas a los que se puede enfrentar un experimentador. Hay poco o ningún control sobre las variables de entrada; hay una amplia variación en la respuesta individual; la respuesta puede ser sólo de naturaleza probabilística; puede haber largos retrasos para observar una respuesta; rara vez hay una oportunidad de observar un efecto genuinamente nulo (normalmente no llevamos a cabo encuestas de sensibilidad adecuadas antes de que el ayuntamiento empiece a añadir fluoruros, o antes de que la planta nucleoelectrica se construya), y por lo general hay una multitud de factores externos que confunden. Lo único que podemos hacer es llevar a cabo nuestro proceso de muestreo con tanto cuidado como sea posible. Debemos obtener una medición artificial de efecto nulo conformando un grupo experimental, tan grande como sea posible, que esté bajo la influencia que estamos estudiando, y un grupo de control, que esperamos esté exento de esa influencia, que en todos los demás aspectos corresponda con el grupo experimental tan estrechamente como sea posible.

Lo principal de este tipo de trabajo de experimentación o estudio, radica en la habilidad y el cuidado con que se haga el muestreo. Los efectos que se estudian son normalmente tan sutiles que, a consecuencia tan sólo de variaciones en el procedimiento de muestreo, no es raro que distintas encuestas arrojen conclusiones completamente contradictorias. De hecho, es sabido que personas con particulares intereses de por medio pueden proporcionar resultados de encuestas que “prueban” su argumento, obteniendo el resultado que desean mediante un control cuidadoso en sus procedimientos de muestreo. Muchos de

los problemas en los que las cuestiones científicas tienen especial relación con las políticas de gobierno, presentan esta característica de variables de entrada incontrolables, y todos deberíamos familiarizarnos tanto como sea posible con los procedimientos empleados en el muestreo y las pruebas de significancia. De esta manera seremos capaces de juzgar tan exactamente como se pueda las demandas usualmente conflictivas de los protagonistas.

Al afrontar problemáticas de tal complejidad, debemos a menudo desistir de emplear las pautas conocidas de pensamiento que otrora se han aplicado con éxito en otras áreas. Por ejemplo, el término “prueba” se usa legítimamente en muchos contextos. Podemos probar resultados matemáticos basados en principios matemáticos. La palabra se usa también (tal vez menos legítimamente) con referencia a las medidas cuando el nivel de incertidumbre lo permite. Hemos probado que el Sol está a mayor distancia de la Tierra que la Luna (aunque sería mejor decir simplemente que la distancia medida es mayor). Pero hay otros campos en los que no podemos usar la palabra en absoluto. Todos hemos escuchado, por ejemplo, que la evidencia que relaciona fumar cigarrillos con el cáncer pulmonar es “solamente estadística”, y que el daño no se ha “probado”. Esas situaciones son confusas, en parte porque los efectos observables aparecen sólo en términos de probabilidades, y también porque esos efectos pueden aparecer solamente después de que han pasado muchos años. En tales casos, el concepto de “prueba” debe modificarse. En la actualidad se ha reemplazado por el concepto de *correlación*. Los estudios de correlación dan resultados, expresados en términos de probabilidades, que difieren en carácter de las nítidas relaciones causa-efecto con las que estamos familiarizados en otros experimentos. Sin embargo, pueden ser igualmente válidos para identificar los factores que influyen en los sistemas. El concepto de correlación se tratará más ampliamente en la sección 6-14.

## PROBLEMAS

1. Un científico afirma que la velocidad final de caída de un paracaidista depende sólo de la masa del individuo y de la aceleración debida a la gravedad. ¿Vale la pena montar un experimento para comprobarlo?
2. El alcance de un proyectil disparado con una velocidad  $v$  a un ángulo con la horizontal  $\alpha$  debe depender de su masa, la velocidad, el ángulo y la aceleración de la gravedad. Encuentre la forma de la función respectiva.
3. Se sabe que la presión dentro de una burbuja de jabón depende de la tensión superficial del material y el radio de la burbuja. ¿Cuál es la naturaleza de esa dependencia?
4. El periodo de un péndulo de torsión es función de la constante de rigidez (par/unidad de deflexión angular) del soporte y el momento de inercia del cuerpo oscilante. ¿Cuál es la forma de la función?

5. La deflexión de una viga de sección circular apoyada en los extremos y cargada en el centro depende del peso de la carga, la distancia entre los apoyos, el radio de la viga y el módulo de Young del material. Deduzca la naturaleza de la dependencia.

*En todos los problemas que siguen, enuncie las variables o combinaciones de variables que deben graficarse para verificar la variación sugerida, y diga cómo puede encontrarse la incógnita (pendiente, ordenada al origen, etc.).*

6. La posición de un cuerpo que parte del reposo y está expuesto a una aceleración constante está descrita por

$$s = \frac{1}{2}at^2$$

donde  $s$  y  $t$  son las variables medidas. Determine  $a$ .

7. La frecuencia fundamental de vibración de una cuerda está dada por:

$$n = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

donde  $n$ ,  $l$  y  $T$  son las variables medidas. Determine  $m$ .

8. La velocidad de flujo de salida de un fluido ideal por un orificio en el lado de un tanque está dada por

$$v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$$

donde  $v$  y  $P$  son las variables medidas. Determine  $\rho$ .

9. Un péndulo cónico tiene un periodo dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$

donde  $T$  y  $\alpha$  son las variables medidas;  $l$  es fija y conocida. Determine  $g$ .

10. La deflexión de una viga en cantilever se expresa por

$$d = \frac{4Wl^3}{Yab^3}$$

donde  $d$ ,  $W$  y  $l$  son las variables medidas;  $a$  y  $b$  son fijas y conocidas. Determine  $Y$ .

11. La elevación capilar de un fluido en un tubo está dada por

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}$$

donde  $h$  y  $R$  son las variables medidas;  $\rho$  y  $g$  son fijas y conocidas. Determine  $\sigma$ .

12. La ley de los gases para un gas ideal es

$$pv = RT$$

donde  $p$  y  $T$  son variables medidas;  $v$  es fija y conocida. Determine  $R$ .

13. El efecto Doppler de la frecuencia para una fuente en movimiento está dado por

$$f = f_0 \frac{v}{v - v_0}$$

donde  $f$  y  $v_0$  son variables medidas;  $f_0$  es fija y conocida. Determine  $v$ .

14. La expansión lineal de un sólido está descrita por

$$l = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

donde  $l$  y  $\Delta t$  son variables medidas;  $l_0$  es constante, pero desconocida. Determine  $\alpha$ .

15. La ley de refracción es

$$\mu_1 \sin \theta_1 = \mu_2 \sin \theta_2$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son variables medidas;  $\mu_1$  es fija y conocida. Determine  $\mu_2$ .

16. La ecuación de las lentes delgadas (o de los espejos) puede expresarse como

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

donde  $s$  y  $s'$  son variables medidas. Determine  $f$ . Hay dos maneras de graficar esta función. ¿Cuál es la mejor?

17. La frecuencia de resonancia de un circuito  $L - C$  en paralelo está dada por

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

donde  $\omega$  y  $C$  son variables medidas. Determine  $L$ .

18. La fuerza entre cargas electrostáticas está descrita por

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$F$  y  $r$  son variables medidas para  $q_1$  y  $q_2$  fijas y conocidas. ¿Cómo comprueba la ley inversa del cuadrado?

19. La fuerza entre corrientes está descrita por:

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi r}$$

donde  $F$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  y  $r$  son variables medidas;  $\mu_0$  y  $l$  son constantes. ¿Cómo comprueba la forma de la dependencia?

20. La descarga de un capacitor está descrita por

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}$$

donde  $Q$  y  $t$  son variables medidas.  $R$  es fija y conocida. Determine  $C$ .

21. La impedancia de un circuito  $R-C$  en serie es

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

donde  $Z$  y  $\omega$  son variables medidas. Determine  $R$  y  $C$ .

22. La variación relativista de la masa con la velocidad es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

donde  $m$  y  $v$  son variables medidas. Determine  $m_0$  y  $c$ .

23. Las longitudes de onda de las líneas en la serie de Balmer del espectro del hidrógeno están dadas por

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

donde  $\lambda$  y  $n$  son variables medidas. Determine  $R$ .

# 6

## Evaluación de experimentos

### 6—1 ENFOQUE GENERAL

Aun cuando hayamos terminado de hacer las mediciones en un experimento, todavía resta por cumplir una parte igualmente significativa del proceso: debemos evaluar la importancia de lo que se ha hecho. Al realizar el experimento, nuestro objetivo es poder hacer alguna proposición al cabo. Es importante identificar con claridad lo que queremos enunciar, y asegurarnos que el enunciado es tan exacto y completo como sea posible así como que esté perfectamente justificado por nuestras observaciones. La forma precisa en que evaluemos el experimento en su conjunto, dependerá del tipo de experimento que hayamos realizado. Como ya explicamos en los capítulos 4 y 5, podríamos haber trabajado con o sin un modelo teórico, y nuestras mediciones pueden o no estar dominadas por fluctuaciones estadísticas. Los procedimientos a seguir, pues, variarán en consecuencia.

Antes de proseguir, empero, debemos advertir dos hechos generales. Primero, siempre debemos tener presente que los resultados experimentales son valiosos. A menudo son resultantes de un amplio programa experimental que absorbe a mucha gente y grandes cantidades de dinero. A cualquier escala de costo, los resultados pueden ser únicos e irrecuperables. Es preciso admitir la obligación de extraer cada ápice disponible de información a partir de nuestras observaciones, y asegurarnos de que nuestra proposición final es tan completa como sea posible. El segundo hecho general tiene que ver con la objetividad.

Es casi imposible evitar emprender un experimento abrigando alguna idea preconcebida de lo que “debe” ocurrir. Debemos, sin embargo, disciplinarnos para ser tan objetivos como podamos, y así el resultado del experimento es distinto de lo esperado o deseado, o nos decepciona de algún modo, nuestro deber es estar preparados para exponer el resultado en forma honrada y realista, y obtener con base en ello la orientación requerida para el trabajo futuro.

En el laboratorio de enseñanza, donde a veces es difícil tener en mente los objetivos finales con toda claridad, y es fácil en cambio olvidar que nuestros experimentos sirven para simular tareas reales en el mundo del trabajo, comúnmente nos encontramos con la creencia equivocada de que la misión consiste en reproducir los valores conocidos de magnitudes experimentales. Si, por ejemplo, estamos midiendo la aceleración de la gravedad y obtenemos un valor de  $9.60 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-2}$ , y nuestra respuesta difiere del resultado “correcto”, concluimos que estamos “equivocados”. El “error” entonces puede atribuirse por conveniencia a los instrumentos. De hecho, como no hay resultados “correctos” de las magnitudes experimentales, nuestra situación en efecto tiene que ver con la comparación de dos valores medidos de una cantidad. Cada valor medido tiene sus características propias, así como su propio intervalo de incertidumbre. Evaluar la importancia de una discrepancia entre dos valores medidos independientes de una misma cantidad, es realmente una tarea compleja y difícil. Es mucho mejor, en principio, desarrollar nuestra habilidad para medir tan confiablemente como sea posible, y evaluar su intervalo de incertidumbre con la mayor exactitud; más tarde podremos preocuparnos de comparar nuestras mediciones con las de otras personas.

Así que cuando estamos efectuando mediciones de magnitudes de las que de antemano conozcamos con certeza un valor más preciso, es mejor disciplinarnos para evitar pensar en ese valor más preciso o “estándar”; es mejor adquirir experiencia y fortalecer la confianza en nuestro propio trabajo. Esta confianza hará falta más adelante, cuando nos dediquemos a la experimentación profesional, en la que deberemos hacernos responsables de nuestros propios experimentos, y medir fenómenos que acaso nunca hayan sido medidos antes.

De modo que si obtenemos un valor de  $9.60 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-2}$  para  $g$ , démonos cuenta de igual manera que la incertidumbre del caso es de  $\pm 0.3 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-2}$ , y el resultado no es tan malo como podríamos pensar al principio. Si vamos a reclamar por algo, que sea por los  $\pm 0.3 \text{ m}\cdot\text{seg}^{-2}$ , pero no tenemos por qué sentirnos culpables al respecto si nuestro dispositivo experimental, con un esfuerzo normal, no es capaz de dar una precisión mejor que el 3%. No debemos engañarnos por la forma en que suelen citarse los valores aceptados de algunas magnitudes físicas en los libros de texto. Estos valores con frecuencia se men-

cionan de manera más bien ocasional, y los textos rara vez aclaran el que estas cantidades son resultantes de una complicada labor por parte de generaciones de científicos expertos. Para nosotros, es muy instructivo leer la historia detallada de tales mediciones, podrán hallarse excelentes ejemplos de ello en el libro de Shamos citado en la Bibliografía. Debemos rehuir la improvisación con magnitudes como éstas, y no esperar reproducirlas con toda exactitud en dos horas de trabajo en un laboratorio elemental.

Lo principal es enunciar el resultado del experimento con honradez y objetividad plenas. Indudablemente el experimentador debe esforzarse con seriedad por sacar el máximo provecho del experimento, asegurándose de que el resultado final sea tan confiable como sea posible, y los límites de incertidumbre tan estrechos como el experimento lo permita. En todos los casos, no obstante, lo esencial es ser realista.

## 6-2 LAS ETAPAS DE LA EVALUACION DEL EXPERIMENTO

El proceso de evaluación de resultados de un experimento consta de varias fases. En primer lugar, debemos obtener los valores de las magnitudes básicas y sus incertidumbres respectivas. En segundo, debemos evaluar el grado de correspondencia entre las propiedades del sistema y las del modelo. En tercero, es preciso calcular los valores de cualquier propiedad del sistema que nos hayamos propuesto medir desde un principio. Por último, habrá que hacer una estimación de la precisión global del experimento. Consideremos ahora uno a uno estos pasos.

### a) Cálculo de cantidades elementales

El primer paso para obtener el resultado de nuestro experimento consiste en calcular las cantidades elementales que lo componen. Por ejemplo, un experimento con péndulo simple cuyo propósito es determinar un valor de  $g$ , probablemente dará, como variable de entrada, un conjunto de lecturas de la longitud  $l$ . La variable de salida estará representada por un conjunto de mediciones de los tiempos requeridos para un cierto número de oscilaciones, y a partir de ellos podrán calcularse luego los valores del periodo  $T$ . Nuestro propósito actual es calcular los valores de  $l$  y  $T$  y sus incertidumbres; esto conformará la base para el análisis gráfico posterior. La elección del procedimiento dependerá aquí de si hemos optado por hacer una evaluación subjetiva de los intervalos de incertidumbre de cada medida, o si hemos considerado que las fluctuaciones al azar son lo bastante significativas para hacer deseable el tratamiento estadístico.

### b) Incertidumbre estimada

En el caso del péndulo simple, la primera variable a considerar es  $l$ . Aquí acaso encontremos que medir la longitud del péndulo con una regla de madera nos permite identificar intervalos, como los que se describen en la sección 2-3, dentro de los que estamos “casi seguros” se hallan nuestros valores. Por tanto, nuestros datos experimentales aparecerán como un conjunto de valores de  $l$  en esta forma: valores  $\pm$  incertidumbre. También es concebible, si hemos estado contando oscilaciones y midiendo tiempos con un cronómetro, que podamos de igual modo identificar intervalos en la escala de tiempo dentro de los cuales estamos “casi seguros” se encuentran nuestros valores de tiempo. Estos también se expresarán como tiempo  $\pm$  incertidumbre. Sin embargo, ésta todavía no es nuestra variable  $T$ . Tal vez contemos 15 oscilaciones del péndulo, obteniendo un valor para el tiempo de  $18.4 \pm 0.2$  seg, y el valor del periodo, o tiempo requerido para *una* oscilación, deberá obtenerse por división como  $1.227 \pm 0.013$  seg. Nótese que no sólo debe calcularse así el valor central, sino también el valor de la incertidumbre. En términos algebraicos sencillos tenemos que

$$\left(\frac{1}{15}\right)(18.4 \pm 0.2) = \frac{18.4}{15} \pm \frac{0.2}{15} = 1.227 \pm 0.013$$

Es importante no pasar por alto este tipo de modificación significativa del valor de incertidumbre; será necesaria siempre que se hagan cálculos aritméticos de las magnitudes básicas.

El resultado final del proceso de este experimento será un conjunto de valores de  $l$  y  $T$ , completo con sus incertidumbres, y estaremos listos para construir el trazado de nuestra gráfica.

### c) Incertidumbre estadística

Si la repetición del proceso de medición ha mostrado fluctuaciones al azar en una o en ambas variables, quizá resolvamos, como se explicó en la sección 5-3(e), considerar una muestra de observaciones, cuyo tamaño se escoge de acuerdo con la magnitud aparente de la dispersión de los datos a fin de lograr la precisión requerida. Como debemos reducir el conjunto resultante de mediciones a una forma adecuada para graficar, tenemos que expresar la muestra en la forma valor central  $\pm$  incertidumbre. Cabe recordar que, según expusimos en la sección 3-10, la forma más adecuada para elegir las es normalmente la media de la muestra y la desviación estándar de la media, dada la importancia fácilmente reconocible de estas cantidades. Suponiendo que quede claro en nuestro informe que estamos citando medias de las muestras y desviaciones es-

táandar de las medias, todo el mundo entenderá que estamos especificando intervalos con una probabilidad del 68% de contener la media del universo en cuestión.

Al tiempo que hacemos estas afirmaciones sobre la importancia cuantitativa de nuestras mediciones, vale la pena recordar las advertencias hechas en la sección 3-5. Las muestras de mediciones que encuentra uno en el trabajo normal del laboratorio de física, a menudo son demasiado pequeñas para permitir una evaluación de la distribución de frecuencia real del universo del que fueron tomadas. Por consiguiente, al atribuir las propiedades numéricas de la distribución Gaussiana a nuestra muestra, sólo estamos haciendo una suposición. Por lo común la hipótesis es suficientemente buena, pero debemos de recordar sin duda alguna que se trata sólo de una suposición.

En este punto recordemos también las advertencias sobre las estimaciones de  $\sigma$  en muestras pequeñas que se hicieron en la sección 3-11, y verifiquemos además que los cálculos son significativos. En general, no vale la pena adoptar un enfoque estadístico con menos de 10 observaciones; para algunos propósitos particulares podrían requerirse muchas más.

Por otro lado, es útil pensar por anticipado en la interpretación de las regiones de incertidumbre en la gráfica. Si ambas variables en nuestro experimento tienen características estadísticas semejantes, la media y la desviación estándar de la media de cada punto nos permitirán dibujar, para cada punto de la gráfica, un pequeño rectángulo cuya interpretación será evidente. Podríamos tener bastantes dificultades si nuestro experimento da variables de dos clases diferentes. Es muy probable que en, digamos, el experimento de caída libre bajo la acción de la gravedad usado como ejemplo en la sección 4-2, una variable, la distancia de caída, tenga apropiadamente una incertidumbre estimada, y que la otra requiera un tratamiento estadístico que considere desviaciones estándar de la media. Si fuéramos a graficar valores derivados de estos dos tipos diferentes de tratamiento, nuestros intervalos de incertidumbre sobre los dos ejes serían diferentes. El intervalo de incertidumbre en una dimensión dará casi un 100% de probabilidad de contener el valor deseado, mientras que la probabilidad de la otra dimensión será de sólo el 68%. En un caso como éste, será difícil saber cómo interpretar la gráfica, y convendría más hacer corresponder las variables en mayor medida. Considerando que un intervalo de dos veces la desviación estándar de la media nos da una probabilidad del 95% de incluir el valor del universo, podemos usar  $2S_m$  como nuestra incertidumbre para la variable tratada estadísticamente, lo cual nos da un intervalo de incertidumbre para cada punto de la gráfica con aproximadamente la misma importancia en ambas dimensiones.

En esta etapa, por uno u otro proceso, la medición de cada magnitud en el experimento se habrá reducido a un valor central y su incertidumbre, pero aún no estamos debidamente preparados para empezar a trazar la gráfica real. Si se va a dibujar esta gráfica con una variable en un eje y la otra variable en el segundo eje (como peso vs. alargamiento para un resorte, o corriente vs. diferencia de potencial para un resistor), entonces podemos proceder directamente. Sin embargo, es igualmente común representar cantidades en la gráfica que deben construirse a partir de las mediciones originales por algún proceso de cálculo aritmético ( $T^2$  vs.  $\ell$  para un péndulo,  $t$  vs.  $\sqrt{h}$  para la caída libre bajo la acción de la gravedad, etc.). No hay, desde luego, mayor dificultad en realizar estos cálculos aritméticos tan sencillos, pero no debemos olvidar que los valores de incertidumbre también deberán calcularse otra vez. Si vamos a representar valores de  $T^2$  en la gráfica, las barras o los rectángulos de incertidumbre deben dar el intervalo real en el que la misma  $T^2$  es incierta. Todas estas magnitudes calculadas deberán proporcionarse con sus propios intervalos de incertidumbre, y sólo entonces estaremos listos para empezar a trazar la gráfica del experimento.

### 6-3 GRAFICAS

Ya sea que la gráfica sirva como una mera ilustración del comportamiento de un sistema físico o sea la clave para evaluar el experimento y calcular el resultado, la meta es colocar las observaciones de manera que sus características se presenten tan claramente como sea posible. Eso implicará elecciones apropiadas de escala, proporciones, etc. Primero, asegúrese de que el papel cuadriculado es lo suficientemente grande. Es una pérdida de tiempo graficar observaciones que tienen una precisión del  $\frac{1}{5}\%$  en una hoja de papel de  $12 \times 18$  cm, donde una típica incertidumbre de trazado es tal vez del  $2\%$ . Como veremos más adelante, se perderá información valiosa a menos que las incertidumbres de los puntos sean claramente visibles, y por ello es necesario asegurarse de que el papel de la gráfica sea suficientemente grande. Segundo, haga que la gráfica llene el área disponible. Esto se puede lograr escogiendo las escalas de manera que la trayectoria general de la gráfica pase aproximadamente a  $45^\circ$  de los ejes, y suprimiendo el cero si es necesario. Si se está graficando la resistencia de un alambre de cobre como función de la temperatura, y los valores van de 57 a 62 ohms, empiece la escala de resistencia en 55 ohms y prolongarla hasta 65. Si la escala empieza en cero, la gráfica se verá como un techo plano sobre una hoja en blanco, y llevará muy poca información.

Hay, sin embargo, excepciones en las que puede ser importante conservar el origen como parte de la gráfica. Puede ser deseable, o incluso necesario, examinar el comportamiento de la gráfica cerca del cero en uno o en ambos

ejes. En otras ocasiones, para propósitos de ilustración, tal vez deseemos mostrar claramente la escala de alguna variación en relación con el valor cero. No obstante, para efectos del análisis gráfico que nos ocupa, en general es mejor hacer que la gráfica abarque todo el papel.

El método de marcar cada medida sobre el papel de la gráfica depende, hasta cierto punto, de la preferencia personal. Una característica esencial, por supuesto, es asegurarse de que el intervalo de incertidumbre se indique claramente. Sólo si esto se cumple, puede tener algún sentido el proceso de comparar el comportamiento del sistema con el del modelo, y se puede evaluar la incertidumbre de cualquier cálculo futuro de pendientes, etc. A cada punto de la gráfica le asignamos una cruz, con barras verticales y horizontales que indiquen el intervalo de incertidumbre, o podemos hacer de cada “punto” un pequeño rectángulo que rodee el valor medido e indique el intervalo de incertidumbre en cada coordenada con su dimensión horizontal y vertical. Mientras los intervalos de incertidumbre estén indicados claramente, quizás no importe el método que escojamos: lo importante es adquirir el hábito de marcar las incertidumbres en cada gráfica que dibujemos. También es conveniente anotar en la gráfica misma, o en su encabezado, la naturaleza de las incertidumbres, es decir, límites extremos estimados, incertidumbres estadísticas de  $1S$  o  $2S$ , etc. Puede resultar muy frustrante el tratar de apreciar la importancia de una gráfica si tenemos que buscar por todo el texto para descubrir qué significan las marcas de incertidumbre. Si se tienen que dibujar varias gráficas en una misma hoja de papel, cerciórese de que éstas se distinguen con toda claridad usando símbolos o colores diferentes, o por algún otro medio.

## 6—4 COMPARACION ENTRE MODELOS EXISTENTES Y SISTEMAS

Una vez que todas nuestras observaciones estén representadas en la gráfica, estamos listos para proceder con la siguiente etapa: la comparación entre las propiedades del sistema, que ahora están representadas ante nuestros ojos, y las propiedades de cualesquiera modelos que estén disponibles. Nuestro procedimiento dependerá de las circunstancias, y describiremos las diversas situaciones caso por caso. En todo lo que sigue supondremos que, a causa de la dificultad de representar propiedades no lineales de los modelos en gráficas dibujadas a mano, hemos escogido o rearmado nuestras variables de modo que las gráficas tomen forma lineal.

Supongamos, en primer lugar, que tenemos un modelo totalmente especificado que no contiene cantidades indeterminadas. El propósito de nuestra

investigación experimental será, pues, ver únicamente cuán bien corresponden las propiedades del modelo a las del sistema. Para esto, simplemente tendríamos que trazar sobre nuestra gráfica, a la misma escala, la gráfica de la función que representa las propiedades del modelo. En la figura 4-10 se ilustró ya un caso típico, en el que las observaciones del tiempo de caída de un objeto en función de la distancia se compararon con la expresión analítica

$$t = 0.4515x^{1/2}$$

que representa nuestro modelo teórico de esa situación.

Pero, ¿cómo vamos a juzgar el grado de correspondencia? Aquí es donde la presencia de los intervalos de incertidumbre cobra una importancia decisiva. Si sólo hubiésemos graficado puntos sin barras de incertidumbre, la inevitable dispersión de los puntos significaría que la probabilidad de que la línea que representa las propiedades del modelo pase por lo menos por uno (digamos no por más de uno) de los puntos, será demasiado pequeña. De este modo, ¿cómo podríamos afirmar algo sensato sobre el resultado de la comparación? Si, en cambio, los “puntos” de la gráfica representan intervalos de posibilidad de localización de los valores graficados, es posible hacer enunciados lógicamente satisfactorios. En otro caso, como el de la figura 4-10, la línea que representa al modelo pasó por la región de incertidumbre de cada punto, y podemos sostener justamente eso. Nótese, una vez más, que esto no significa que hayamos “probado” que la ecuación era “verdadera” o “correcta” o algo parecido. Lo que podemos afirmar es que el modelo y el sistema son “consistentes”, o “están de acuerdo” o son “compatibles”, o alguna frase por el estilo. Debemos estar seguros de que utilizamos el lenguaje correcto, porque de otra manera estamos mal interpretando la situación, y corremos el riesgo de desorientar a la gente. Obsérvese también que debemos de ser cuidadosos al expresar que hemos encontrado “correspondencia”, “consistencia”, “concordancia”, o lo que fuere, entre el modelo y el sistema, únicamente al nivel de precisión de nuestro experimento. Nada de nuestro proceso nos autoriza a dejar de considerar el hecho de que, a un nivel superior de precisión en las medidas, podrían surgir discrepancias no detectables en nuestro experimento.

Considerado ya el caso en el que modelo y sistema resultan tener propiedades que no son distinguibles al nivel de precisión aplicado, debemos estudiar los otros casos en que las propiedades del modelo y las del sistema no se traslapan completamente. Veamos una a una las distintas posibilidades.

**a) No hay discrepancia detectable**

Este es el caso que ya hemos analizado en detalle. Se ilustra en la figura 6-1(a).

**b) Correspondencia en parte del rango**

Con mucha frecuencia se encuentran circunstancias en las que un modelo proporciona una descripción satisfactoria de un sistema, siempre que el valor de alguna variable no sobrepase o quede dentro de cierto límite. En este caso, la comparación gráfica aparecerá como en la figura 6-1(b) o (c). Un ejemplo del caso (b) sería el flujo de un fluido por un tubo, en el cual la proporcionalidad entre rapidez de flujo, y columna de presión sólo es satisfactoria por debajo del inicio de la turbulencia. La figura 6-1(c) podría servir para ilustrar la variación de la resistividad de un metal con la temperatura, para la cual el modelo lineal deja de funcionar a las temperaturas más bajas.

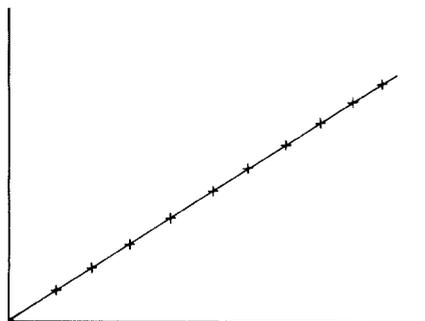
En cualquier caso que corresponda a esta categoría, enunciaríamos el resultado de la comparación en términos tales como “Observamos una correspondencia (compatibilidad, consistencia, etc.) entre el modelo y las observaciones sólo en tal o cual intervalo; se observó que las propiedades del modelo y las del sistema divergen significativamente a partir de tal y o cual valor”. Nótese nuevamente que debemos resistir la tentación de juzgar que algo “está mal” porque no encontramos una correspondencia completa entre los modelos y los sistemas en todo el rango. Tanto los modelos como los sistemas existen por su propio derecho, y no podemos prejuzgar hasta qué punto sus propiedades se van a traslapar. De hecho, la detección de los límites de validez de un modelo particular puede proporcionar pistas importantes para mejorarlo.

**c) Ordenadas al origen o interceptos**

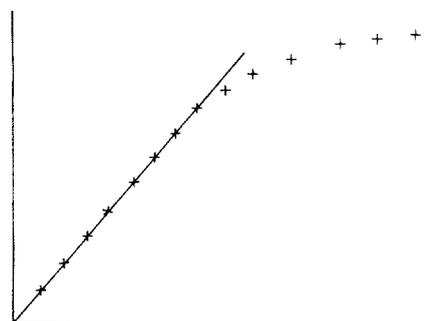
Una situación bastante común tiene que ver con las ordenadas al origen. La gráfica del comportamiento del modelo puede pasar por el origen, pero el comportamiento observado del sistema quizás no, según se ilustra en las figuras 6-1(d) y (e). Una discrepancia como ésta puede surgir de diversos tipos de desajuste entre el modelo y el sistema, y la información sobre esas ordenadas al origen puede ser muy útil para analizar situaciones experimentales. Por lo general, es muy conveniente, al trazar gráficas, verificar el comportamiento del modelo y el del sistema en el origen; este aspecto se consideró ya en la sección 6-3, sobre dibujo de gráficas. Como vimos en la sección 4-5, el análisis gráfico de un experimento es muy valioso porque nos permite obtener respuestas libres de errores sistemáticos asociados con interceptos inesperados. Sin embargo, aun con esta protección, lo mejor en general es saber si existe un intercepto inesperado, para que podamos comprobar el grado total de correspondencia entre el modelo y el sistema.

**d) Dispersión inesperada de los puntos**

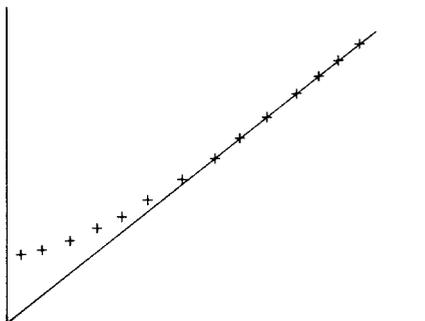
Como se explicó en el capítulo sobre planeación de experimentos, es indispensable evaluar cuidadosamente la incertidumbre de nuestras mediciones antes



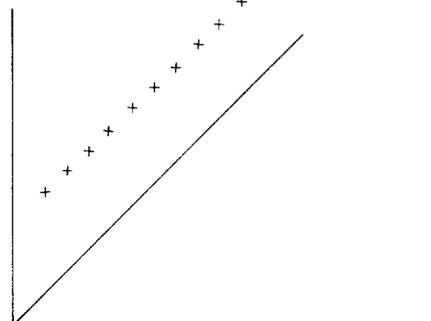
(a)



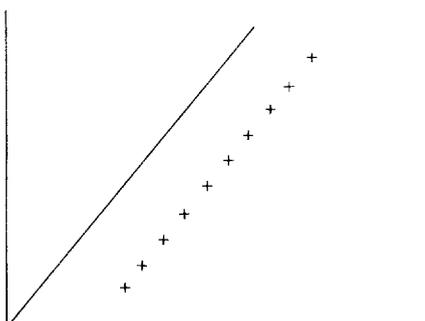
(b)



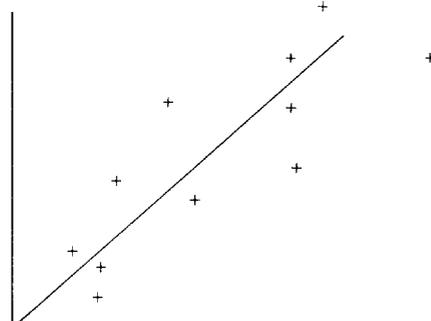
(c)



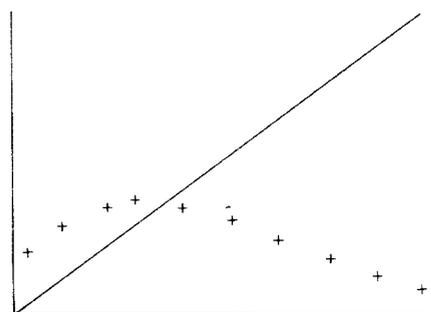
(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 6-1 La comparación entre sistemas y modelos.

de empezar el experimento en sí, y, a la luz del índice de precisión terminal propuesto, elegir las opciones adecuadas de métodos de medición. Si hemos hecho todo eso en forma satisfactoria, encontraremos, al trazar la gráfica, que hay consistencia entre la dispersión de los puntos y las incertidumbres en las mediciones. Esto se ilustró en la figura 6-1(a). Sin embargo, las cosas no siempre funcionan como quisiéramos, y no es raro que nos hallemos en la situación ilustrada en la figura 6-1(f), que resulta, simplemente, de la presencia de factores en nuestros métodos de medición que no identificamos al hacer nuestra evaluación inicial sobre la incertidumbre de las mediciones.

No debemos contentarnos con dejar la situación así. Vale la pena revisar los instrumentos para averiguar la causa de esa fluctuación. Podría ser algo tan simple como una conexión eléctrica suelta, o el no haber agitado una solución caliente, y siempre será confortante ver que tales discrepancias desaparecen. Si, por alguna razón, no es posible mantener el experimento en curso y tomar medidas para reducir la dispersión, tal vez sea necesario trabajar con los resultados tal como están y enunciar lo mejor que podamos en lo relativo al grado de correspondencia entre el modelo y el sistema. Quizás podamos afirmar algo como “las observaciones se distribuyen uniformemente alrededor de la línea que representa el modelo”. Para los casos en que tenemos que obtener información numérica a partir de las líneas trazadas usando tales mediciones experimentales, véase la sección 6-7.

#### e) No correspondencia entre el sistema y el modelo

Muy rara vez encontramos circunstancias en las que el comportamiento del sistema no se parece en absoluto al comportamiento del modelo [figura 6-1(g)]; si todo en el experimento funciona como se espera, éste es un resultado que sería poco probable. Los modelos pueden ser, en principio, representaciones inadecuadas del comportamiento del mundo físico, pero no tendrían la condición de modelos si fueran tan malos como los que estamos ilustrando en el caso presente. Una falta de correspondencia tan grave como ésta, es señal clara de un auténtico error en el experimento. Podría tratarse de un error de interpretación de las variables, una equivocación al rectificar la ecuación, una incorrecta disposición de los instrumentos, o una equivocación al hacer las observaciones, calcular los resultados, trazar la gráfica. De ser posible, vuelva hasta el principio, revise todo, y empiece de nuevo. Si no es posible verificar los aspectos instrumentales del experimento, cerciórese de que no haya errores en todos los procesos analíticos y aritméticos. Si todos los intentos por descubrir el error fallan, especifique el resultado del experimento con toda honradez y objetividad. Siempre existe la posibilidad de que hayamos descubierto algo nuevo. En todo caso, si estamos sinceramente sorprendidos por alguna discrepancia entre un instrumento bien verificado y un modelo confiable, lo más seguro es que un informe honrado de nuestra situación le interese a otras personas.

En todo lo anterior hemos procurado hacer hincapié en un punto importante: no debemos pensar que el experimento nos da un resultado “correcto” o “incorrecto”. Simplemente llevamos a cabo nuestro proceso experimental con tanto cuidado como sea posible, y presentamos luego los resultados en la forma más honrada y objetiva que podamos. No está mal recordar que de vez en cuando los modelos sólo pueden proporcionar una representación parcialmente satisfactoria del comportamiento de los sistemas. Lo más importante es que conozcamos los límites de validez de los modelos, y la forma en que éstos fallan pueden proporcionar valiosas evidencias a quienes buscan mejorarlos.

## 6-5 CALCULO DE VALORES A PARTIR DEL ANALISIS DE LINEAS RECTAS

En todas las secciones anteriores nos hemos ocupado de modelos que estaban especificados por completo, incluyendo los valores numéricos de todas las cantidades que intervienen. En tales casos, el propósito experimental era simplemente comparar el comportamiento del sistema y el del modelo. Sin embargo, como se consideró en la sección 4-5, también es posible, y de hecho muy común, usar el análisis de líneas rectas para determinar, con respecto a alguna magnitud del modelo, el valor numérico adecuado para nuestro sistema. En tales casos nuestro modelo no está completamente especificado, porque incluye una o varias magnitudes de valor inicialmente desconocido. No es posible, entonces, trazar una gráfica del modelo para compararlo con los puntos. En este caso, la gráfica contiene originalmente los puntos solos, como se muestra en la figura 6.2(a).

Supongamos que hemos estado midiendo los valores de corriente que pasa por un resistor y la diferencia de potencial entre sus extremos, y que deseamos comprobar las observaciones contra el modelo:

$$V = IR$$

En ausencia de un valor especificado de  $R$ , el comportamiento del modelo está representado por todas las líneas en el plano  $I, V$  que tienen la ecuación:

$$V = \text{constante} \times I,$$

donde la constante puede tomar cualquier valor entre cero e infinito. En principio podemos simplemente trazar estas líneas en la misma gráfica que las mediciones, y determinar, primero, hasta qué punto el comportamiento del modelo y el del sistema se traslapan. En segundo lugar, a partir del haz de líneas

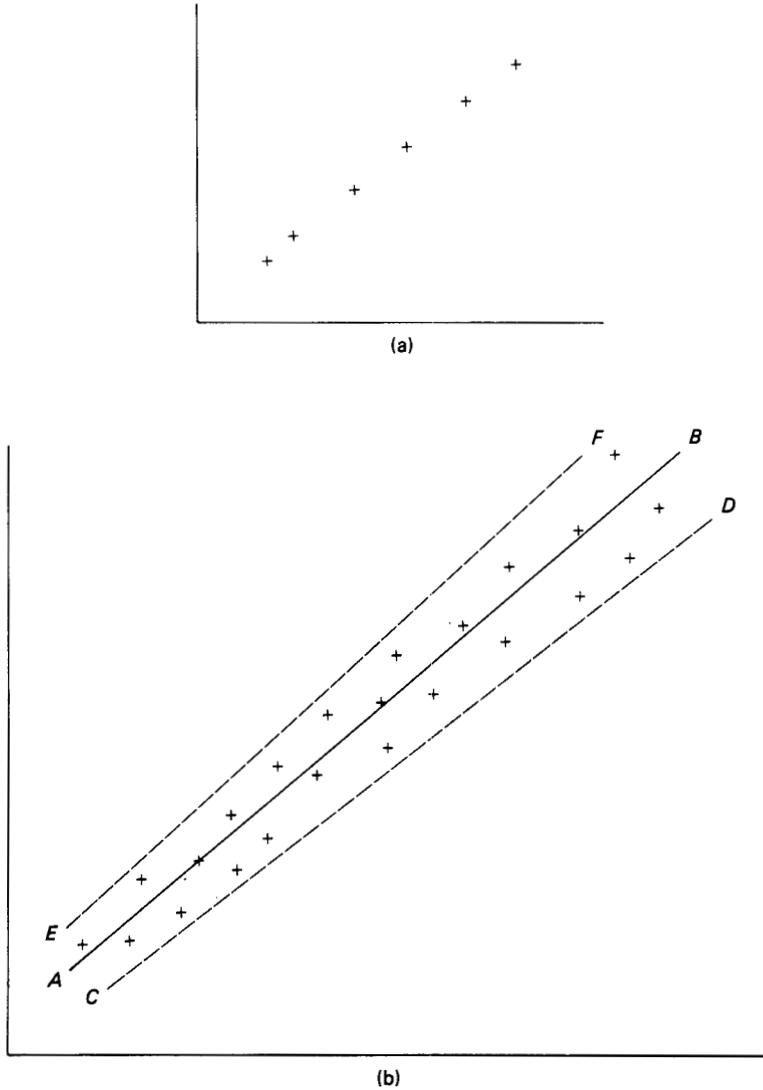


Figura 6-2 Ajuste de una línea recta a las observaciones.

que está en las regiones de incertidumbre de todos los puntos, podemos determinar el intervalo de valores de  $R$  que es apropiado para nuestro sistema (esto se ilustró antes en la figura 4-11). Sin embargo, para este propósito eso no es tan simple como parece, porque, con base en los valores medidos que se muestran en la figura 6-2(a), no tenemos derecho a prejuzgar el comportamiento

del sistema en el origen. Es mejor dejar la cuestión de los interceptos para un análisis ulterior, y decidir simplemente sobre el conjunto de líneas rectas que es consistente con las observaciones.

Hay varias maneras de hacerlo; la más satisfactoria, el método/estadístico, se explicará más adelante. Mientras tanto, nos contentaremos con procedimientos mecánicos más simples, y llevaremos a cabo la práctica consagrada por años de “trazar la línea recta que mejor se ajuste a los puntos”. Hacer esto a ojo requiere algún auxilio mecánico que no oculte la mitad de los puntos. No se puede usar una regla opaca, pero una regla o una escuadra transparentes son aceptables. Probablemente el mejor auxiliar sea un trozo de hilo oscuro: puede estirarse sobre los puntos y moverse con facilidad hasta encontrar la posición más satisfactoria. Si se tropieza con dificultades para juzgar visualmente la tendencia de un conjunto de puntos, a menudo resulta muy útil sostener la hoja de la gráfica a la altura de la vista, y ver en dirección de los puntos. Esto facilita más el poder apreciar la acumulación de los puntos alrededor de una línea recta, o una desviación sistemática de la línea recta, que con el examen convencional de visión directa.

Hay varias líneas rectas que podemos identificar con provecho. La “mejor” línea recta (cualquiera que sea el significado de “mejor”) es una candidata obvia. Además, podemos hacer una estimación de cuánto se puede girar esa “mejor” línea en uno u otro sentido, hasta que ya no podamos considerarla como aceptable para ajustarse a los puntos. Estas dos líneas nos proporcionarán un valor de la incertidumbre en la pendiente. En los casos en los que resulta difícil identificar una “mejor” línea y sus límites de incertidumbre, a veces es útil recordar que nuestros puntos y sus incertidumbres son en realidad una muestra de toda una banda de valores sobre el plano. La ocupación de esa banda por nuestras observaciones puede ser irregular, dado el número limitado de estas últimas, y esto dificulta nuestra elección de líneas. Si éste es el caso, con frecuencia nos sirve el imaginar que la banda está poblada con los millones de mediciones que podríamos hacer con los instrumentos. Así, podemos tratar de adivinar en nuestra gráfica dónde podrían estar el centro y las orillas de esa banda, y ello nos permitirá elegir nuestras líneas. En la figura 6-2(b), por ejemplo, podríamos haber escogido  $AB$  como nuestra “mejor” línea, y considerado que las líneas  $CD$  y  $EF$  (marcadas) contendrían casi la totalidad del universo infinito de mediciones. Las líneas  $CF$  y  $ED$  (no dibujadas) representarían entonces, respectivamente, la pendiente más pronunciada y la menos pronunciada de las líneas consistentes con los puntos observados.

Una vez que hayamos escogido nuestras líneas, podemos emprender la determinación del valor numérico de sus pendientes, de modo que podamos obtener el resultado que queremos, como en este caso del ejemplo de  $V = IR$ ,

el valor de  $R$ . Nótese que, para nuestros propósitos, la cuestión de la pendiente no tiene nada que ver con el ángulo que forman las líneas en el papel cuadrulado; estamos hablando de intervalos en los valores medidos de las variables  $I$  y  $V$ , y las pendientes deben calcularse analíticamente. Para una línea como la  $AB$  en la figura 6-3, busque con cuidado cerca de los extremos e identifique puntos en donde la línea cruza, tan exactamente como sea posible, una intersección de las líneas del papel cuadrulado. Identifique las coordenadas  $(I_1, V_1)$  e  $(I_2, V_2)$  de esas intersecciones, y evalúe la pendiente como:

$$\text{pendiente} = \frac{V_2 - V_1}{I_2 - I_1}$$

Luego, tenemos que

$$R = \text{pendiente}$$

lo que nos da el resultado que buscábamos. Por supuesto, en expresiones más complicadas el valor de la pendiente puede darnos la respuesta deseada sólo después de hacer un cálculo con otras cantidades medidas.

Debemos ejecutar este proceso tres veces. Nuestra línea  $AB$  nos dará nuestro "mejor" valor elegido para  $R$ , y las otras dos líneas,  $CF$  y  $ED$  (no di-

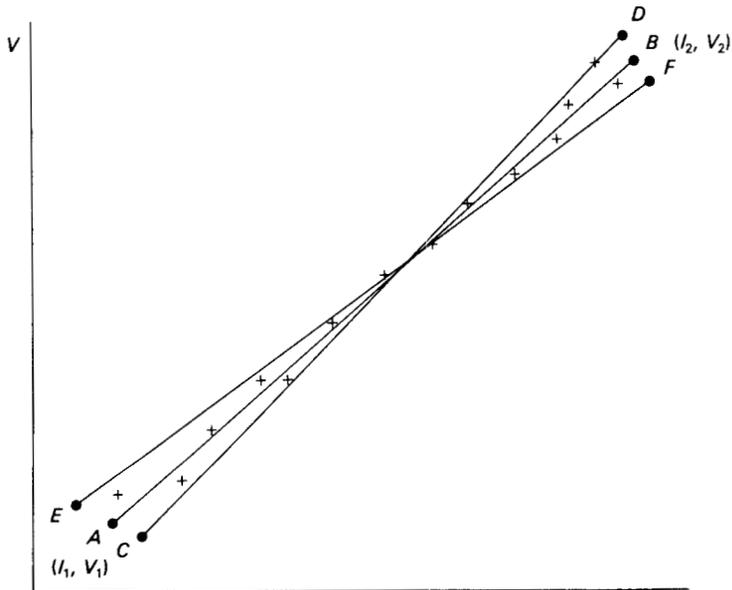


Figura 6-3 La "mejor" pendiente y sus límites extremos.

bujadas) nos proporcionarán el límite superior y el inferior, fuera de los cuales estamos “casi seguros” de que no se halla el valor de  $R$ . Por lo común encontraremos que estos valores extremos del intervalo de incertidumbre son aproximadamente equidistantes del valor central, y será posible finalmente citar nuestro valor de  $R$  como

$$R = \text{valor} \pm \text{incertidumbre}$$

A veces, podrá parecer que nuestra “mejor” línea y las dos líneas de límites extremos no están uniformemente espaciadas. La razón es que, por lo general, la gráfica contiene muy pocos puntos para permitir una buena apreciación de la posición de las líneas. Aunque en ocasiones ocurran circunstancias en las que los experimentadores se sienten obligados a expresar el resultado como

$$\text{valor} \begin{cases} + \text{ incertidumbre 1} \\ - \text{ incertidumbre 2,} \end{cases}$$

el discernimiento visual de una gráfica rara vez es suficientemente preciso para justificar este procedimiento. Debe evaluarse de nuevo la posición de las líneas en la gráfica en busca de una configuración simétrica, más plausible. Si en nuestro experimento la respuesta deseada no es directamente igual a la pendiente, nuestra expresión para la pendiente puede contener un cierto número de cantidades, y nuestra incógnita tendrá que calcularse a partir de la pendiente por un proceso aritmético separado. Si esas otras cantidades tienen incertidumbre en sí mismas, la incertidumbre del resultado tendrá que obtenerse combinando la incertidumbre en la pendiente con las demás incertidumbres, aplicando al efecto las técnicas del capítulo 2.

Es natural a estas alturas pensar en la importancia de la incertidumbre asociada con cantidades extraídas de las gráficas. Esto dependerá del tipo de incertidumbre marcada en la gráfica. Si las barras indican los límites extremos de variación posible (evaluadas subjetivamente o de  $2S_m$  en el caso de fluctuaciones estadísticas), entonces los límites de la pendiente serán de naturaleza semejante. Si los puntos se han marcado con límites de  $1S_m$ , las pendientes límites  $CF$  y  $ED$  (no dibujadas) probablemente representen límites que implican una probabilidad mayor del 68%, ya que las líneas límites se han trazado con un sesgo pesimista.

En lo anterior hemos supuesto que la dispersión encontrada en los resultados finales está dentro del intervalo de incertidumbre que se predijo. En consecuencia, el uso de las líneas límite da lugar a un valor muy bien definido de la incertidumbre de la pendiente. Sin embargo, si la dispersión está muy afuera

del intervalo esperado de incertidumbre (debido a una fuente insospechada de fluctuación), entonces no hay una disposición única de líneas dentro de las cuales estemos “casi seguros” de que se encuentra el resultado. En tal caso, y en todo trabajo de precisión, no existe sustituto para el método de mínimos cuadrados, que se describirá en la sección 6-7.

Nótese que al escoger nuestras tres líneas deliberadamente, hemos excluido al origen de nuestras consideraciones. Lo hicimos precisamente porque el comportamiento del sistema en el origen puede ser una de las cosas que queremos examinar. Si la gráfica del comportamiento del modelo pasa por el origen, debemos inspeccionar nuestras tres líneas en esa región. Es muy poco probable que nuestra línea central pase exactamente por el origen, pero, si el área entre las dos líneas límite efectivamente incluye el origen, podemos afirmar que hay consistencia entre el modelo y el sistema, al menos en nuestro nivel actual de precisión. Sólo si a todas luces ambas líneas límite intersectan el eje en un lado del origen, podemos afirmar que hemos identificado con precisión una coordenada al origen inesperada.

Si el comportamiento del modelo nos induce a esperar una ordenada al origen de la que confiamos obtener el valor de alguna magnitud, la intersección de las tres líneas con el eje en cuestión nos dará esa coordenada al origen directamente en la forma deseada: valor  $\pm$  incertidumbre.

## 6—6 CASOS DE CORRESPONDENCIA IMPERFECTA ENTRE EL SISTEMA Y EL MODELO

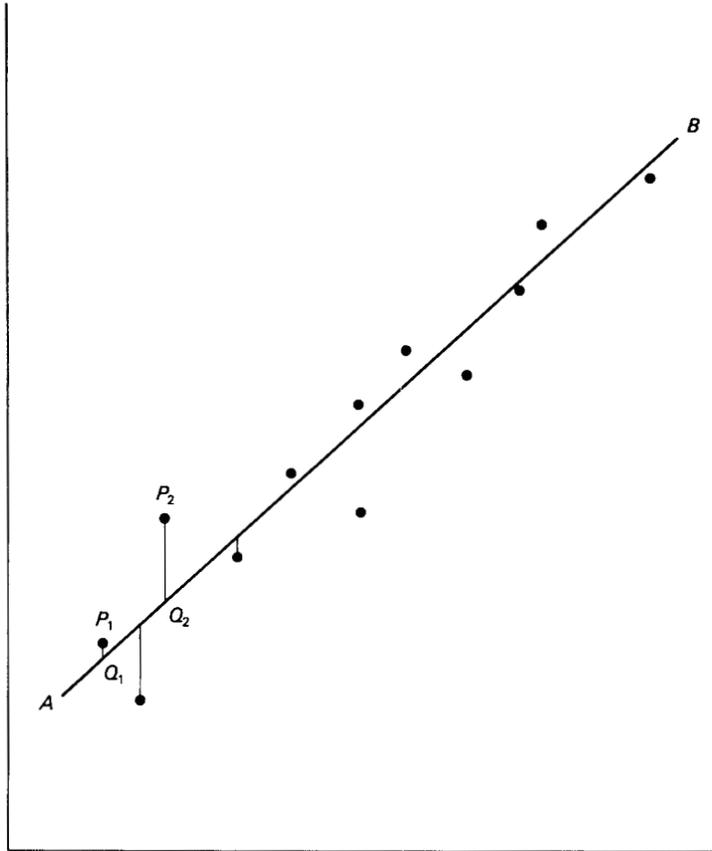
En los casos en los que la correspondencia entre el modelo y el sistema es sólo parcial, debemos tener cuidado que al obtener nuestros resultados evitemos introducir errores sistemáticos debidos a discrepancias. Con referencia a las figuras 6-1(b) y (c), consideremos primero los casos en que los valores medidos corresponden adecuadamente con la línea recta del modelo sólo dentro de un intervalo limitado. Desde luego que nuestro cálculo de pendientes deberá restringirse a esas regiones en las que el sistema y el modelo son compatibles. Los puntos que se desvían sistemáticamente de la línea sin duda resultan de circunstancias físicas no incluidas en el modelo, y obviamente es inadecuado incluirlas en cualquier cálculo basado en este último. Por tanto, hacemos caso omiso de todos los puntos que se desvían sistemáticamente del comportamiento de una línea recta por una cantidad que evidentemente sobrepasa las incertidumbres estimadas y la dispersión observada de los puntos, y derivamos nuestra pendiente y su incertidumbre de la región lineal.

Un segundo aspecto a considerar tiene que ver con las coordenadas al origen. Aunque el comportamiento del modelo pase por el origen, no es raro observar que nuestra gráfica muestra una coordenada al origen. Esta desviación puede provenir de causas muy variadas; afortunadamente, muchas de ellas no son de consecuencia. Si la discrepancia que causa la coordenada al origen afecta a todas las mediciones de la misma manera (como un error de cero no detectado en un instrumento, o una falsa fuerza electromotriz constante en un circuito eléctrico), entonces la gráfica nos dará una pendiente libre del error sistemático que de otro modo se introduciría. Es prudente, pues, disponer nuestro experimento de modo que el resultado pueda obtenerse de la pendiente de la gráfica, mientras que aquellas magnitudes que puedan estar sujetas a un error sistemático indeterminado deberán relegarse al papel de ordenadas al origen. Esta capacidad del análisis gráfico de proporcionar resultados libres de muchos tipos de error sistemático, es una de sus principales ventajas.

## 6-7 EL PRINCIPIO DE MINIMOS CUADRADOS

Todos los procedimientos descritos en las secciones anteriores tienen una característica en común: se basan en el discernimiento visual por parte del experimentador. Así, aunque los procedimientos se utilicen muy comúnmente y con provecho, son vulnerables a la crítica de que, aun cuando se apliquen con mucho esmero, no podemos estar bien seguros de la importancia cuantitativa de los resultados. Sería muy reconfortante que pudiéramos emplear algún procedimiento matemático para identificar la “mejor” línea para un conjunto de puntos dado, porque entonces nos liberaríamos de la inseguridad del juicio personal. Además, podríamos confiar en llegar a saber lo que queremos decir con la “mejor” línea, y evaluar la precisión de tal elección.

El procedimiento en cuestión se basa en el principio estadístico de los mínimos cuadrados. Consideraremos éste en su aplicación restringida para escoger una línea recta que se ajuste a los valores medidos (una explicación más detallada sobre el principio en general, podrá verse en el Apéndice 2). Supongamos que tenemos un conjunto de  $N$  valores de una variable  $y$ , medidos como función de la variable  $x$ . Debemos restringirnos al caso especial de que toda la incertidumbre se limita a la dimensión  $y$ : esto es, los valores de  $x$  se conocen exactamente, o al menos, con una precisión tanto mayor que la de los valores de  $y$ , como para poder despreciar la incertidumbre en la dimensión  $x$ . Si no se puede satisfacer esta condición, el tratamiento sencillo que se explica a continuación no será válido. El método puede ampliarse para abarcar el caso de incertidumbre en ambas dimensiones, pero el procedimiento no es sencillo; el lector interesado en ahondar al respecto encontrará una excelente exposición en el libro de Wilson citado en la Bibliografía.



**Figura 6-4** Ajuste de una línea recta a un conjunto de puntos por el principio de mínimos cuadrados.

La pregunta por contestar ahora con nuestro procedimiento matemático es: ¿cuál de todas las líneas en el plano  $x - y$  escogemos como la mejor, y qué queremos decir con “la mejor”? El principio de mínimos cuadrados permite hacer esta elección con base en las desviaciones de los puntos en dirección vertical a partir de las líneas. Sea  $AB$  en la figura 6-4 una candidata a la categoría de “mejor” línea. Consideremos todos los intervalos verticales entre los puntos y la línea, de los cuales  $P_2O_2$  es típico. Definiremos como mejor línea aquella que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones como  $P_2O_2$ .

Nótese que no tenemos la oportunidad a considerar que un criterio inventado como éste proporcione algún camino automático a las respuestas

“verdaderas” o “correctas”. Se trata, simplemente, de una opción de criterio para optimizar la trayectoria de nuestra línea entre los puntos. Hay que reconocer, empero, que si ofrece algunas ventajas sobre otras posibilidades, como minimizar la tercera potencia de los intervalos, o la primera, etc. Aunque no hace falta, en general, que nos ocupemos directamente de la justificación lógica del principio de mínimos cuadrados tal como lo aplicamos, es interesante darse cuenta de cuál es la base de su validez propuesta. Se puede probar que el procedimiento de minimizar *los cuadrados* de las desviaciones da lugar, en muestreos repetidos, a una menor varianza de los parámetros resultantes, como por ejemplo la pendiente, que al usar cualquier otro criterio. En consecuencia, tenemos derecho a confiar más en los resultados obtenidos usando el principio de mínimos cuadrados, que en el caso de cualquier otro método comparable; de aquí que el uso de este principio esté muy difundido.

Expresemos ahora el principio de mínimos cuadrados en forma matemática. Definimos que la mejor línea es aquella que lleva a su valor mínimo la suma

$$\sum (P_i O_i)^2$$

y deseamos obtener los parámetros, pendiente  $m$  y ordenada al origen  $b$ , de esa mejor línea.

Sea la ecuación de la mejor línea:

$$y = mx + b$$

La magnitud de la desviación  $P_i O_i$  es el intervalo entre un cierto valor medido  $y_i$  y el valor de  $y$  en ese punto, para el valor de  $x$ . Este valor  $y$  se puede calcular a partir del valor correspondiente de  $x$  como  $mx_i + b$ , de modo que, si le llamamos  $\delta y_i$  a cada diferencia, tenemos:

$$\delta y_i = y_i - (mx_i + b) \quad (6-1)$$

El criterio de mínimos cuadrados nos permite obtener los valores deseados de  $m$  y  $b$ , a partir de la condición

$$\sum [y_i - (mx_i + b)]^2 = \text{mínimo}$$

Y escribimos:

$$\sum [y_i - (mx_i + b)]^2 = M$$

Luego, la condición para que sea un mínimo es

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial b} = 0 \quad (6-2)$$

Un breve ejercicio algebraico nos permite entonces obtener los valores de la pendiente y la ordenada al origen de la mejor línea, que son:

$$m = \frac{N \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6-3)$$

$$b_1 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (6-4)$$

Con esto, hemos logrado reemplazar el uso a veces cuestionable del juicio personal, por un procedimiento matemático, que da resultados de importancia bien precisada y aceptabilidad universal. Además, como el nuevo método tiene cierta significación estadística, cabe esperar una forma más precisa para el cálculo de incertidumbre. De hecho, el principio de mínimos cuadrados nos permite obtener inmediatamente valores de la desviación estándar de la pendiente y la ordenada al origen, lo que nos da incertidumbres de significación estadística conocida.

La desviación estándar de la pendiente y la ordenada al origen se calculan en términos de la desviación estándar de la distribución de valores de  $\delta y$  alrededor de la mejor línea, que llamaremos  $S_y$ . Esta última está dada por:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (\delta y_i)^2}{N - 2}} \quad (6-5)$$

(No se preocupe porque una desviación estándar se calcule usando  $N - 2$  en el denominador, en vez de  $N - 1$  o  $N$ ; esto es consecuencia de aplicar la definición de la desviación estándar a la posición de una línea en un plano). Los valores de  $S_m$  y  $S_b$  están dados entonces por

$$S_m = S_y \times \sqrt{\frac{N}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (6-6)$$

$$S_b = S_y \times \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}} \quad (6-7)$$

Estos pueden utilizarse en combinación con los valores de  $m$  y  $b$  para indicar intervalos con el significado normal, es decir que los intervalos de una des-

viación estándar nos dan una probabilidad del 68% de encerrar el valor central del universo en cuestión, dos desviaciones estándar 95%, etc. Una ventaja muy importante del método de mínimos cuadrados es que nos proporciona valores estadísticamente significativos de las incertidumbres en la pendiente y la ordenada al origen, que se derivan objetivamente de la dispersión real en los mismos puntos, sin perjuicio de cualquier afirmación optimista que queramos hacer sobre las incertidumbres de los valores medidos.

En el Apéndice 2 se encontrará una descripción matemática más completa del método de mínimos cuadrados. En ese apéndice se encontrará también una ampliación del método, que hemos excluido del presente análisis. Si, en nuestro experimento, los puntos utilizados en el cálculo de mínimos cuadrados no son igualmente precisos, debemos usar algún procedimiento que le asocie mayor importancia a las mediciones más precisas. Este procedimiento se denomina "ponderación". El uso de los procedimientos de ponderación no se limita al ajuste de líneas rectas; son aplicables siempre que queramos combinar observaciones de alguna manera, aun en un proceso tan sencillo como el de determinar la media de un conjunto de valores de precisión desigual. Las ecuaciones para encontrar una media ponderada y para hacer un cálculo ponderado de mínimos cuadrados, pueden estudiarse en el Apéndice 2.

## 6-8 AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS DE FUNCIONES NO LINEALES

Los procedimientos empleados en la sección 6-7 para determinar la pendiente y la ordenada al origen de la mejor línea recta pueden, desde luego, aplicarse, al menos en principio, a funciones no lineales. Podemos expresar una ecuación análoga a la ecuación (6-1) para cualquier función, y todavía aplicar un requisito semejante a la ecuación (6-2) para expresar la obtención del mínimo de la cantidad  $M$  con respecto a los parámetros del modelo que escogimos. Si las ecuaciones que resultan para los parámetros son fáciles de resolver, podemos proceder a calcular sus valores tal como lo hicimos para las líneas rectas.

Con frecuencia, sin embargo, no es fácil resolver las ecuaciones. En tales casos desistimos de obtener una solución analítica del problema, y nos atenemos a la computadora para que nos proporcione soluciones aproximadas con base en técnicas iterativas. Construimos una función de prueba, calculamos la suma de las diferencias al cuadrado, y luego variamos la función elegida hasta que se encuentre un mínimo para esa suma. La exposición de estos métodos basados en computadora puede verse en el texto de Draper y Smith que se cita

en la Bibliografía. Con todo, si puede hallarse un método para probar un modelo en forma lineal, la solución, en efecto, será más sencilla.

Adviértase bien que, en todos los casos, es responsabilidad del experimentador escoger el tipo de función que ha de emplearse; todo lo que el método de mínimos cuadrados puede hacer es proporcionarnos, para la función escogida, los valores de los parámetros que mejor se ajustan a las observaciones.

## 6—9 PRECAUCIONES CON EL AJUSTE DE MINIMOS CUADRADOS

Los procedimientos matemáticos para el ajuste de mínimos cuadrados son completamente imparciales. Al emplear las ecuaciones (6-3) y (6-4) para ajuste lineal, éstas harán pasar una línea recta por cualquier conjunto de puntos, haciendo caso omiso por completo de si una función rectilínea es la adecuada. Si, por ejemplo, nuestro experimento nos ha dado un conjunto de observaciones (figura 6-5), que muestra sin lugar a dudas la falla de un modelo lineal, y si, sin mayor cuidado, empleamos el procedimiento de mínimos cuadrados con todo el conjunto de observaciones, obtendremos los parámetros de una línea, *AB* que no tiene significación alguna, ya sea para el modelo o para el sistema. Es preciso, pues, poner atención para evitar el uso irreflexivo del método de mínimos cuadrados.

Esta advertencia es tanto más importante en una época en la que, como sabemos, todos podemos cargar en el bolsillo maquinillas que nos pueden dar, tocando apenas unas cuantas teclas, los parámetros de mínimos cuadrados para cualquier conjunto de números que queramos insertar. Conviene recordar que, si estamos comparando líneas rectas con nuestro conjunto de mediciones, es porque *nosotros* mismos resolvimos que era sensato hacerlo. No debemos, por tanto, considerar siquiera el uso de un procedimiento de mínimos cuadrados, en tanto no hayamos representado las observaciones en una gráfica y estemos satisfechos, por la inspección visual y nuestro juicio personal, de que el ajuste de una recta es adecuado. Además, quizá sea necesario decidir que algunas de las observaciones quedan fuera del alcance del modelo, y que no son apropiadas para incluirlas en la elección de la mejor línea recta. Sólo una vez que hayamos considerado cuidadosamente la situación en la gráfica, y que nos hayamos asegurado de que el ajuste de una recta es adecuado en todo o en parte del alcance de las observaciones, estaremos justificados para iniciar el procedimiento de mínimos cuadrados. No hacer caso de esta advertencia puede dar lugar a errores muy graves en la interpretación del experimento.

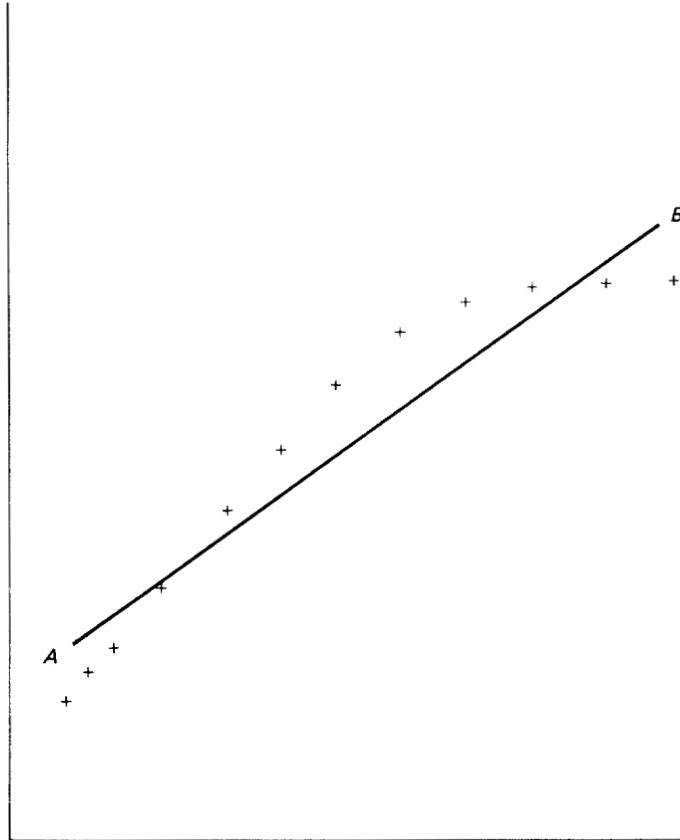


Figura 6-5 Uso inadecuado del ajuste por mínimos cuadrados.

## 6-10 BUSQUEDA DE FUNCIONES

Todo el análisis anterior implicaba la suposición de que ya poseíamos un modelo que queríamos comparar con un sistema. Aunque por lo común éste es el caso, a veces pasa que tenemos un conjunto de observaciones para las cuales no hay un modelo disponible. Esto puede ocurrir, por ejemplo, en la investigación del modelo de un fenómeno que nunca se ha observado antes, o bien si trabajamos en un sistema que es tan complicado que nunca dispondremos de un modelo teórico. Las observaciones, cuando se grafican en forma elemental, probablemente muestren una curva que no tenga una forma fácilmente identificable. En ausencia de un modelo, ¿qué podemos hacer?

Algo que podemos hacer es tratar de encontrar funciones que tengan algún grado de correspondencia con las observaciones. Este procedimiento puede ser muy útil. Por ejemplo, en sistemas muy complejos para los cuales hay poca esperanza de construir modelos teóricos, tal vez sea lo único que podamos hacer. Un modelo empírico, aunque sea sólo una función matemática que no es más que una reformulación del comportamiento real del sistema en forma matemática, puede facilitar el procesamiento de las observaciones por computadora, y será indispensable para procedimientos como la interpolación o extrapolación. Estos modelos se pueden usar, por ejemplo, para pronosticar la reacción del PNB de un país ante un cambio en la tributación, o para obtener mediciones de temperatura a partir de la curva de calibración de un termómetro de resistencia.

Por otro lado, en sistemas más sencillos, para los cuales existe la esperanza de poder construir un modelo teórico a partir de principios básicos, algunas funciones, cuando se demuestra que son adecuadas a las observaciones, pueden ofrecernos una valiosa guía para construir modelos al sugerir el tipo de procesos físicos que están presentes en el fenómeno. Aun así, debemos ser cautelosos. El hecho de que hayamos identificado una función que parece ser consistente con nuestro conjunto de observaciones a un nivel particular de precisión, no “prueba” que hayamos encontrado la función “correcta”. Muy a menudo, funciones de tipos muy diversos pueden mostrar comportamientos muy parecidos, especialmente en un intervalo corto de las variables, y la “guía” de una función inadecuadamente definida puede ser muy desorientadora. Puede retrasar el progreso teórico genuino durante años, y en la historia de la física hay muchos ejemplos de esa falta de comprensión de que cualquier elección de una función empírica debe ser provisional.

Por consiguiente, con la debida atención a la importancia posiblemente limitada de nuestros procedimientos, describiremos algunos de los métodos que pueden utilizarse. Pueden ser muy sencillos en algunos casos, y dos de ellos son importantes porque tienen que ver con funciones de ocurrencia relativamente común. Supongamos que hemos hecho mediciones de dos variables, que llamaremos  $x$  y  $y$ .

#### a) Funciones de potencias

Consideremos la función

$$y = x^a$$

donde  $a$  es una constante. Tenemos:

$$\log y = a \log x$$

y una gráfica de  $\log y$  vs.  $\log x$  es una línea recta de pendiente  $a$ . En consecuencia, si queremos comprobar si una función potencial es una función adecuada para nuestras observaciones, podemos graficarlas en la forma  $\log y$  vs.  $\log x$ . Si, al graficar en esa forma, los puntos resultantes corresponden bien con una línea recta, podemos afirmar que una función potencial es un buen ajuste para nuestras observaciones. El valor del exponente adecuado,  $a$ , se derivará de la pendiente de la gráfica y se obtendrá dentro de límites de incertidumbre que dependen de la incertidumbre graficada con los puntos. Una gráfica como ésta puede trazarse en papel cuadriculado ordinario graficando los valores calculados de  $\log x$  y  $\log y$ , o bien empleando papel para gráficas logarítmico. Este tiene un rayado que está espaciado en proporción a los logaritmos de los números, de modo que podemos graficar nuestras observaciones directamente en el papel.

#### b) Funciones exponenciales

Para muchos fenómenos físicos, lo adecuado es una función exponencial. Consideremos

$$y = ae^{bx}$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. En este caso

$$\log_e y = \log_e a + bx$$

y la gráfica de la función será una línea recta cuando grafiquemos  $\log_e y$  vs.  $x$ . Por tanto, si hay razón para sospechar que una función exponencial es adecuada para un sistema particular, debemos hacer una gráfica semilogarítmica, ya sea en papel cuadriculado ordinario, buscando los valores de  $\log_e y$ , o en papel para gráficas “semi-log”, que tiene una escala logarítmica y una lineal. Los valores adecuados de  $a$  y  $b$  podrán obtenerse de la ordenada al origen y la pendiente de la recta, con incertidumbres determinadas por las incertidumbres graficadas con los valores medidos.

## 6—11 REPRESENTACION POLINOMIAL

Si resulta que ni una potencia simple o una función exponencial proporcionan un buen ajuste a un conjunto dado de observaciones, la probabilidad de toparse con una función más compleja que sea la apropiada es muy pequeña. En tales casos, con frecuencia es útil recurrir a una representación polinomial:

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Aunque una representación como ésta quizás no aporte una visión muy profunda respecto a la base teórica fundamental para la operación del sistema, por lo menos ofrecerá algunas de las ventajas de los modelos empíricos. En todo caso, al menos permite el procesamiento de observaciones por computadora y proporciona una base satisfactoria para la interpolación y la extrapolación.

Los coeficientes de expansión polinomial adecuados para nuestro sistema en particular, pueden determinarse usando el principio de mínimos cuadrados. Ahora bien, según observaciones hechas en la sección 6-8, podrá apreciarse que las dificultades asociadas a este proceso aumentan rápidamente en proporción directa a la cantidad de términos del polinomio que se requieren para establecer una correspondencia satisfactoria con las observaciones. Puede verse un análisis más detallado de esos métodos en el libro de Draper y Smith que se cita en la Bibliografía.

Se dispone también de un método similar cuando la dispersión de las observaciones no es muy severa, y si no se requiere la máxima precisión. Las técnicas del cálculo de diferencias finitas pueden aplicarse a las observaciones, así como emplearse una tabla de diferencias para la interpolación y extrapolación o bien para el ajuste de un polinomio. Una exposición completa de los métodos de tabla de diferencias, puede hallarse en los libros de Whittaker y Robinson y de Hornbeck que se citan en la Bibliografía, aunque al mismo respecto se incluye también una descripción elemental en el Apéndice 3.

## 6—12 PRECISION GLOBAL DEL EXPERIMENTO

Al principio del experimento hicimos una conjetura sobre las incertidumbres que era probable que encontraríamos. Esta fue únicamente una estimación para servir de guía en la conducción del experimento. Al final de éste debemos echar una mirada retrospectiva, y mediante una evaluación crítica de los resultados, estimar la precisión real que se ha logrado. No importa mucho qué tipo de incertidumbre escojamos: intervalo estimado de valores posibles, desviación estándar, desviación estándar de la media, etc., siempre que solamente establezcamos con toda claridad el tipo de incertidumbre que se considera.

Para que sea útil, la cifra de incertidumbre global debe ser realista y honrada, aun si el resultado del experimento es menos favorable de lo que esperaríamos. Debe incluir también todas las fuentes identificables de incertidumbre. No tiene caso afirmar que los voltajes que se leen en un poten-

ciómetro de alambre de 1 m de largo tienen una precisión de .05% simplemente porque la escala está graduada en milímetros, si el punto de equilibrio no se puede identificar más que con una aproximación de 2 o 3 mm, o si hay errores a causa de la falta de uniformidad del alambre.

En esta etapa, no deben considerarse las contribuciones conocidas de los errores sistemáticos, porque las correcciones adecuadas a las mediciones ya debieron haberse hecho. Por otra parte, es necesario describir cualquier fuente de error sistemático cuya presencia sospechemos, pero cuya contribución no podamos evaluar exactamente, y tenerla debidamente en cuenta en el intervalo global de incertidumbre. El enunciado final dependerá de las circunstancias.

**a) El resultado es la media de un conjunto de mediciones**

La mejor cantidad a considerar es la desviación estándar de la media, ya que ésta tiene una importancia numérica reconocible. A veces se emplea la desviación estándar misma. En todo caso, es indispensable señalar el número de mediciones, de modo que pueda juzgarse la confiabilidad de la estimación de  $\sigma$ .

**b) El resultado es consecuencia de un solo cálculo**

En la indeseable eventualidad de que no haya sido posible efectuar un análisis gráfico y que el resultado se obtenga algebraicamente de una serie de cantidades medidas, use los métodos del capítulo 3 para calcular los límites extremos de la incertidumbre, o la desviación estándar.

**c) El resultado se obtuvo gráficamente**

Si se ha establecido una línea recta por el método de mínimos cuadrados, las incertidumbres en las constantes  $m$  y  $b$  se obtienen directamente. Nótese, una vez más, que estas incertidumbres tienen la ventaja de haber sido determinadas por la dispersión real de los puntos, independientes de sus incertidumbres estimadas. (Por supuesto, esto no significa que si intentamos hacer un ajuste de mínimos cuadrados a una línea recta, no debemos molestarnos en trazar las incertidumbres, o siquiera trazar una gráfica. Como se subrayó en la sección 6-9, la gráfica, con las incertidumbres de los puntos, todavía hace falta para estimar el intervalo de correspondencia entre el modelo y el sistema antes de hacer el cálculo de mínimos cuadrados.) Si la línea recta se trazó a ojo, las líneas en los límites de posibilidad darán el intervalo probable de la pendiente y la ordenada al origen. Esta incertidumbre en la pendiente probablemente tendrá que combinarse con las incertidumbres de algunas otras cantidades antes de que pueda establecerse la incertidumbre final del resultado.

Como ya hemos mencionado, quizás no importe mucho qué tipo de incertidumbre se considera, en tanto que se emplee alguna y se deje en claro la naturaleza del valor señalado. Además, cuando se trabaja en cálculos prolongados de incertidumbre, puede simplificarse la aritmética eliminando las contribuciones insignificantes a la incertidumbre final. No tiene sentido agregar una contribución del 0.01% a una del 5%. En el enunciado final de incertidumbre no es válido, por lo común, señalar incertidumbres de más de dos cifras significativas; sólo un trabajo de alta significación estadística justificaría más.

## 6-13 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Una vez que se haya obtenido la incertidumbre total del resultado final, se puede considerar el problema del número de cifras significativas que deben conservarse en el resultado. Este tema ya se trató en la sección 2-11; reiteramos lo expuesto aquí simplemente en aras de la integridad en el tratamiento de la evaluación de experimentos.

No hay una respuesta única a la cuestión de las cifras significativas, pero, en general, no se deberían dejar cifras después de la primera cifra incierta. Por ejemplo:  $5.4387 \pm 0.2$  debe señalarse como  $5.4 \pm 0.2$ , porque, si el 4 es incierto, los 387 lo son mucho más. Sin embargo, si se conoce la incertidumbre con mayor precisión, puede estar justificado retener una cifra más. De este modo, si fuera el caso que la incertidumbre anterior es de 0.15, sería válido señalar la respuesta como  $5.44 \pm 0.15$ .

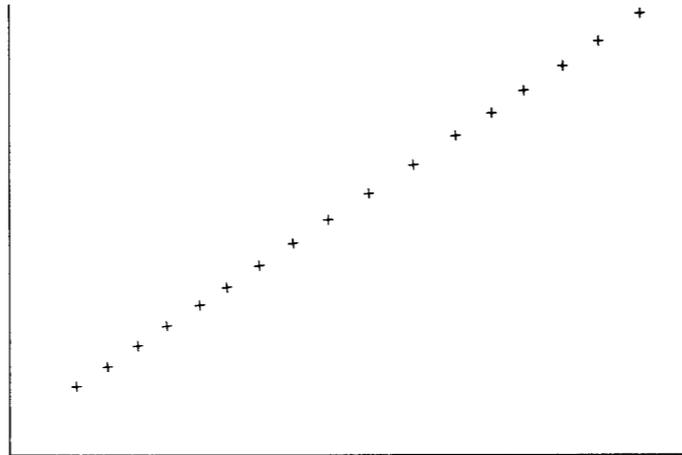
Al señalar una medida con una precisión porcentual, se implica automáticamente el número de cifras significativas. Por ejemplo, ¿qué se daría a entender si una medición se señala como  $527.64182 \pm 1\%$ ? El 1% significa que la incertidumbre absoluta se podría calcular como 5.2764. Sin embargo, la precisión en sí aparece con una sola cifra significativa (1% y no 1.000%), por lo que no estamos justificados para usar más de una cifra significativa en la incertidumbre absoluta. Tomaremos, pues, la incertidumbre absoluta como 5, y eso implica que, si el 7 en el número original es incierto en 5, el 0.64182 no tiene sentido. La medida se podría referir entonces como  $528 \pm 5$ . Si un conjunto de mediciones dado produce una media como resultado, el número de cifras significativas en la media estará gobernado por la desviación estándar de la media, y el número de cifras significativas en la desviación estándar estará gobernado a su vez por la desviación estándar de la desviación estándar.

Por último, es importante asegurarse siempre de señalar un resultado y su incertidumbre de tal manera que los dos sean consistentes; esto es, no como  $16.2485 \pm 0.5$  ni  $4.3 \pm 0.0002$ .

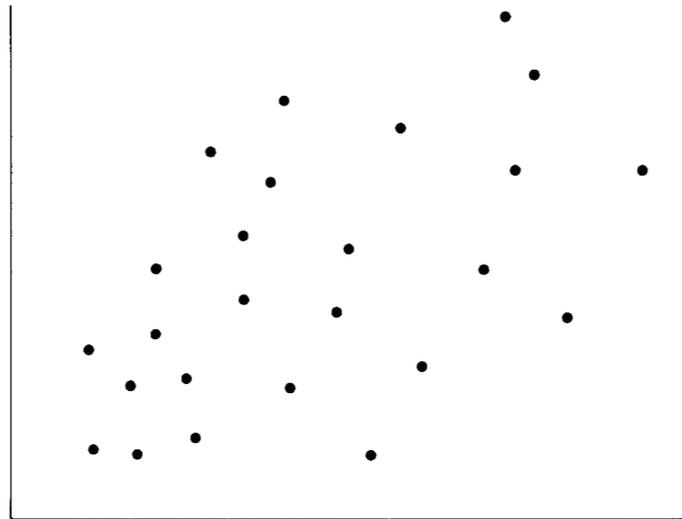
## 6-14 EL CONCEPTO DE CORRELACION

Hasta ahora, hemos considerado la interpretación de resultados experimentales en los cuales estaban disponibles observaciones relativamente precisas, y los modelos eran relativamente satisfactorios. No siempre somos tan afortunados, y mucha de la experimentación moderna es menos sencilla y bien definida de lo que las secciones anteriores podrían sugerir. En muchas áreas de la ciencia es común ocuparse de fenómenos sutiles en los cuales los efectos que buscamos medir pueden quedar total o parcialmente encubiertos por las fluctuaciones estadísticas u otras perturbaciones. En tales casos, lejos de poder hacer comparaciones detalladas entre el sistema y un modelo, quizá nos resulte difícil obtener evidencia clara y definida de que el efecto que estamos considerando por lo menos existe. Esto no es raro en los estudios biológicos, médicos y ambientales. Todos estamos familiarizados con las discusiones sobre el papel que el hábito de fumar juega en el cáncer pulmonar, o los niveles bajos de radiación ionizante en la leucemia, o la dieta en las enfermedades cardiovasculares. En estos casos, el concepto de “prueba” casi siempre sale a relucir en frases como: “No hemos ‘probado’ que fumar ‘cause’ el cáncer pulmonar”. “¿Podemos probar que los ataques al corazón son menos probables si comemos margarina en vez de mantequilla?” Nos hallamos, pues, en un área de operación muy diferente que nuestra clase anterior de experimentos iniciales, y merece la pena darse algún tiempo para reflexionar sobre lo que queremos decir con palabras como “probar” y “causar”.

Consideremos dos experimentos: uno puede ser una medición de la corriente que pasa por un resistor como función de la diferencia de potencial a través de él, y el resultado puede ser como se muestra en la figura 6.6(a). ¿Hemos “probado” que la corriente es “causada” por la diferencia de potencial? Es cierto que la corriente en el extremo superior del alcance es diferente de la del extremo inferior por una cantidad que excede con mucho la incertidumbre en la medición, y que nos hace confiar en que la variación realmente existe. Supuesto que existe, ¿fue “causada” por el cambio en diferencia de potencial? En esa misma ocasión efectivamente observamos que la corriente sí aumentó con el incremento de la diferencia de potencial. Sin embargo, podría ser que la corriente no tenga nada que ver con la diferencia de potencial, y el incremento en la corriente lo causara algún factor totalmente independiente, como la presión atmosférica. La relación aparente con la diferencia de potencial podría ser totalmente accidental. Durante cientos de años, los filósofos nos han advertido que aquellos eventos que se observa que ocurren al mismo tiempo, no necesariamente guardan una relación causal. No obstante, en el caso presente la experiencia acumulada con el experimento, empleando la repetición y una atención cuidadosa al control de otras variables, poco a poco nos convencerá, por supuesto, de que la diferencia de potencial y la corriente en general sí están



(a)



(b)

**Figura 6-6** Extremos de comportamiento con respecto a las relaciones de causa y efecto.

relacionadas, y sólo un filósofo purista argumentaría contra la afirmación de que la diferencia de potencial “causó” que fluyera la corriente.

La situación es muy diferente en casos de definición menos clara. Otro experimento podría dar el resultado que se muestra en la figura 6-6(b). Esto

sería probable si estamos considerando, acaso, la cantidad de resfriados sufridos por el cuerpo estudiantil de una universidad como función de la cantidad de ácido ascórbico ingerido diariamente. ¿Podemos afirmar que el número de resfriados depende de la dosis de ácido ascórbico o no? Quizás encontremos que, después de realizar un experimento bien diseñado usando un grupo experimental y un grupo de control [como se describe en la sección 5-6(b)], el grupo de control de 100 personas que sin saberlo tomó píldoras de azúcar en vez de ácido ascórbico todas las mañanas, tuvo 125 resfriados, mientras que el grupo experimental que estuvo ingiriendo ácido ascórbico presentó un total de 106 resfriados. Las preguntas que debemos hacernos son: ¿Es “significativa” esta diferencia? ¿Qué queremos decir con “significativa”? “Si la diferencia es significativa, ¿se la podemos atribuir al ácido ascórbico?”.

Incluso una atención concienzuda a los detalles de la experimentación, el control sobre las muestras, la supresión de variables falsas, la repetición del experimento, etc., quizás no aclare mucho la situación. Los sistemas biológicos son lo bastante complejos para que rara vez podamos alcanzar el grado de control sobre las variables que caracterizó el experimento de electricidad. Resulta inapropiado, por tanto, buscar la clase de “prueba” de que se dispone en otros sistemas. No podemos afirmar que hayamos “probado” que fumar causa cáncer pulmonar, o que el ácido ascórbico disminuye la incidencia de resfriados, en la misma forma en que podemos “probar” que una diferencia de potencial “causa” un flujo de corriente. Tenemos que contentarnos con otro tipo de afirmación, la cual, aunque menos exacta, todavía puede ser adecuadamente significativa y completamente convincente.

Este tipo de afirmación puede ilustrarse refiriéndonos a un diagrama como el de la figura 6-7. Estas mediciones se hicieron para probar la siguiente proposición: la cantidad de partículas detectadas en una fuente radiactiva débil depende del lapso de medición. Aquí la fluctuación estadística es casi tan grande como el efecto que queremos observar, pero todavía podemos ver que hay una tendencia ascendente en las observaciones. En un caso como éste decimos que hay una “correlación” entre una variable y la otra. Esto significa que podemos observar una tendencia de una variable a seguir a la otra, aunque las fluctuaciones provocadas por otros factores impidan la observación de una correspondencia única, uno a uno. El estudio matemático de tal correlación se llama “análisis de regresión”. El análisis de regresión proporciona una medida numérica del grado de correlación entre las dos variables, y podemos evaluar, para un conjunto particular de observaciones, un “coeficiente de correlación”. El valor de esta cantidad dependerá del grado de dispersión de las observaciones, y varía desde 1, si todas las observaciones coinciden exactamente sobre una línea recta, a 0, si no existe relación alguna entre las variables.

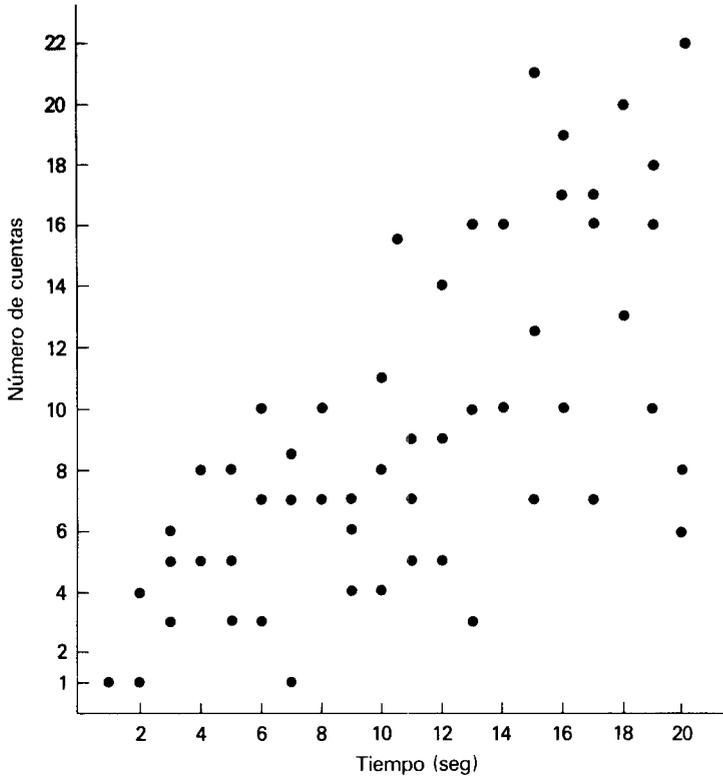


Figura 6-7 Dependencia de la cantidad de partículas respecto del lapso de medición para una muestra radiactiva débil.

Encontramos el concepto de correlación en dos casos significativos: a) si, de dos variables medidas, una puede considerarse como causa de la otra, pero su efecto está parcialmente encubierto por las fluctuaciones al azar, y b) si dos variables pueden considerarse como consecuencias simultáneas de una causa común cuyo efecto, como antes, está parcialmente oculto por fluctuaciones al azar. En cualquier caso, podríamos afirmar que puede observarse un cierto grado de correlación entre una variable y la otra.

Las propiedades matemáticas de las correlaciones se describen en los libros de texto de estadística. Nos limitaremos aquí a señalar la ecuación con la que se calculan los coeficientes de correlación. Para un par de variables medidas  $x$  y  $y$ , la ecuación es:

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}}$$

Una vez calculado, el coeficiente de correlación proporcionará un índice muy importante, esto es, una medida del grado en el que la variación observada en una cantidad puede atribuirse a la variación de la otra. En el caso a) mencionado antes, será el grado en el que la variación de la variable de salida se puede atribuir a la variable de entrada; en el caso b) será el grado en el que la variación de ambas variables se puede atribuir a la variación de cualquiera que sea la fuente común de la influencia.

Aun cuando observemos correlaciones, todavía debemos ser muy cautos de no inferir una relación causal entre las diferentes variables. Si observamos que una variable parece correlacionarse bien con otra, no hemos “probado” que una variable “cause” la otra, en el mismo sentido con que usamos estas palabras en el ejemplo sobre la corriente eléctrica. La literatura científica suele tener muchos ejemplos de correlaciones falsas y desorientadoras. Un conferencista ilustró ese punto con la afirmación irónica de que había descubierto la causa del cáncer: mostró una gráfica de una cantidad que se correlacionaba hermosamente con el incremento de un cierto tipo de cáncer, y sólo después reveló que la otra variable era el consumo de petróleo combustible de la Armada Británica. En otro caso, donde aparentemente se pretendía que se tomara en serio, un periódico de los años veinte anunció el descubrimiento de la causa de la polio, puesto que su incidencia se correlacionaba tan bien con la cantidad de automóviles en las carreteras.

Con todo, casos anecdóticos como éstos no desacreditan el estudio de las correlaciones o la búsqueda de relaciones causales; solamente nos sirven como un recordatorio más de la necesidad de ser cuidadosos y perspicaces. Cuando se tratan con sumo cuidado, y sobre todo cuando la correlación puede observarse repetidamente, los estudios de correlación pueden proporcionar, en efecto, evidencia convincente de una relación causal. Dada la enorme importancia que muchas de estas cuestiones tienen en asuntos públicos, es importante que todos nosotros tengamos una comprensión clara de la naturaleza de la correlación y de los métodos disponibles para las pruebas de significación. Un análisis más detallado sobrepasa el propósito de esta obra, pero se recomienda seriamente proseguir con el estudio del tema en los textos de estadística que aparecen en la Bibliografía.

## PROBLEMAS

1. Se realizó un experimento para medir la impedancia de un circuito  $R$ - $L$  en serie. La impedancia  $Z$  se da en función de la resistencia  $R$ , la frecuencia de la fuente  $f$  y la inductancia  $L$  como

$$Z^2 = R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2$$

En el experimento se midió  $Z$  como función de  $f$ , con la intención de graficar  $Z^2$  en el eje vertical y  $f^2$  en el horizontal para obtener  $L$  a partir de la pendiente y  $R$  a partir de la ordenada al origen. Las lecturas obtenidas se dan en la tabla.

$f$ , Hz	$Z$ , $\Omega$	$f^2$	$f(\delta f)$	$\delta f^2$ $= 2f(\delta f)$	$Z^2$	$Z(\delta Z)$	$\delta Z^2$ $= 2Z(\delta Z)$
$123 \pm 4$	$7.4 \pm 0.2$						
158	8.4						
194	9.1						
200	9.6						
229	10.3						
245	10.5						
269	11.4						
292	11.9						
296	12.2						

Las incertidumbres que se dan en el primer renglón se refieren a todas las mediciones en cada columna.

- a) Grafique estas lecturas en la forma adecuada y marque las incertidumbres en los puntos. Los encabezados de columna que se sugieren para facilitar los cálculos se dan anteriormente.
  - b) Verifique si las observaciones se pueden interpretar en términos de una recta para todo el rango o parte de él.
  - c) Obtenga la pendiente de la mejor línea.
  - d) Calcule el mejor valor de  $L$ .
  - e) Obtenga las pendientes de las líneas en los límites extremos de probabilidad, y de esa forma enuncie el intervalo de incertidumbre de la pendiente.
  - f) Calcule la incertidumbre absoluta en la medida de  $L$ .
  - g) Obtenga el mejor valor de  $R$  a partir de la ordenada al origen.
  - h) Obtenga la incertidumbre del valor de  $R$ .
  - i) Enuncie el resultado completo del experimento con el número apropiado de cifras significativas en cada magnitud.
2. Diez observadores diferentes informan sobre la intensidad de una lámpara, medida con un fotómetro de comparación. Sus resultados (en unidades arbitrarias) aparecen en la tabla siguiente:

Observador	Media	Desviación estándar de la media
1	17.3	2.1
2	18.4	1.9
3	17.1	2.5
4	16.6	2.8
5	19.1	3.2
6	17.4	1.2
7	18.5	1.8
8	14.3	4.5
9	16.8	2.3
10	17.4	1.6

¿Cuál es el resultado del experimento y cuál es su desviación estándar?

3. Se ha llevado a cabo un experimento para investigar la dependencia con la temperatura de la resistencia de un alambre de cobre. Un modelo común se representa por la ecuación:

$$R = R_0 (1 + \alpha T)$$

donde  $R$  es la resistencia a la temperatura  $T^\circ\text{C}$ ,  $R_0$  es el valor de la resistencia a  $0^\circ\text{C}$ , y  $\alpha$  es el coeficiente de temperatura de la resistencia. Las mediciones de  $R$  y  $T$  obtenidas se dan en la tabla de abajo.

- a) Utilizando el método de mínimos cuadrados, obtenga el mejor valor para la pendiente y para la ordenada al origen (los encabezados sugeridos con los que se pueden realizar los cálculos se dan en la primera parte de la tabla).
- b) Obtenga el mejor valor de  $\alpha$ .
- c) Evalúe la desviación estándar de la pendiente y de la ordenada al origen (los encabezados sugeridos para esta parte de los cálculos se dan en la segunda parte de la tabla).

Cálculo de los mejores valores de $R_0$ y $\alpha$				Cálculo de las desviaciones estándar usando los mejores valores de $R_0$ y $\alpha$			
$x$	$y$	$xy$	$x^2$		Valor calculado de $R (= R_0 + R_0\alpha T)$	$\delta R (R \text{ obs.} - R \text{ calc.})$	
$T^\circ\text{C}$	$R \ \Omega$	$TR$	$T^2$	$R_0\alpha T$			$(\delta R)^2$
10	12.3						
20	12.9						
30	13.6						
40	13.8						
50	14.5						
60	15.1						
70	15.2						
80	15.9						
$\Sigma x$ y $(\Sigma x)^2$	$\Sigma y$	$\Sigma (xy)$	$\Sigma (x^2)$				$\Sigma (\delta y)^2$ y $s_y$

- d) De allí evalúe la desviación estándar de  $\alpha$ .
  - e) Enuncie el resultado final del experimento con el número apropiado de cifras significativas.
4. Se desea ajustar un conjunto de observaciones a la función  $y = a + bx^2$  utilizando mínimos cuadrados. Siga los mismos procedimientos empleados en la sección A2-2 de los Apéndices, y calcule las constantes de una función lineal para obtener ecuaciones para  $a$  y  $b$  en la función parabólica. De aquí calcule los valores de  $a$  y  $b$  adecuados para el siguiente conjunto de observaciones:

$x$	$y$
0.5	1.5
1.0	6.3
1.5	12.4
2.0	12.6
2.5	18.0
3.0	32.8
3.5	40.2
4.0	47.4

Suponga que la incertidumbre se limita a la variable  $y$ .

5. Las siguientes mediciones se efectuaron durante una investigación de fenómenos para los cuales no hay modelos disponibles. En cada caso identifique una función adecuada y evalúe sus constantes.

$v$	$i$
0.1	0.61
0.2	0.75
0.3	0.91
0.4	1.11
0.5	1.36
0.6	1.66
0.7	2.03
0.8	2.48
0.9	3.03

a)

$x$	$y$
2	3.2
4	16.7
6	44.2
8	88.2
10	150.7
12	233.5
14	337.9
16	464.5
18	618.0

b)

$T$	$f$
100	0.161
150	0.546
200	0.995
250	1.438
300	1.829
350	2.191
400	2.500
450	2.755
500	2.981

c)

(Esta última es un poco menos obvia)

6. Los siguientes datos provienen de un estudio de la relación entre el promedio en la escuela secundaria al matricularse y el promedio final de los estudiantes de la uni-

versidad al final del primer año. En cada caso, el primer número del par es el promedio de la secundaria, y el segundo el promedio en la universidad.

78,65; 80,60; 85,64; 77,59; 76,63; 83,59; 85,73; 74,58; 86,65;  
80,56; 82,67; 81,66; 89,78; 88,68; 88,60; 93,84; 80,58; 77,61;  
87,71; 80,66; 85,66; 87,76; 81,64; 77,65; 96,87; 76,59; 81,57;  
84,73; 87,63; 74,58; 91,78; 92,77; 85,72; 86,61; 84,68; 82,66;  
81,72; 91,74; 86,66; 90,68; 88,60.

- a) Elabore un diagrama de “dispersión” del promedio de la universidad graficado contra el promedio de la secundaria.
  - b) Evalúe el coeficiente de correlación.
7. Evalúe el coeficiente de correlación para los valores de  $\sqrt{x}$  y  $t$  en la tabla 4-3.

# 7

## Redacción de informes científicos

### 7-1 LA BUENA REDACCION ES IMPORTANTE

Es casi imposible exagerar la importancia de una buena redacción científica. La mejor experimentación del mundo puede tener poco o ningún valor si no se comunica a otras personas, y se les comunica bien, con una redacción clara y atractiva. Aunque la comunicación puede a veces ser oral, en la abrumadora mayoría de los casos la gente se entera de nuestro trabajo a través de páginas impresas. Nuestra obligación de optimizar la habilidad redaccional no es, por tanto, trivial, y debería considerarse como una parte esencial e integral de nuestras actividades experimentales. Nuestra redacción debe ser lo suficientemente buena para atraer y retener la atención y el interés de nuestros lectores. Este capítulo presenta algunas sugerencias para lograrlo.

Es casi imposible decirle a una persona cómo escribir bien. Sería muy útil que pudiésemos ofrecer una breve lista de instrucciones y garantizar con ello una prosa culta, brillante y fluida, pero tal lista no existe. Cada uno de nosotros tiene una forma diferente de expresar sus pensamientos, y cada uno debe permitir que su estilo se desarrolle a su modo particular. Esto requiere una práctica amplia, y debemos considerar la redacción de informes en un primer curso de laboratorio de física como una excelente oportunidad para ganar experiencia en ello. Quizás terminemos por adquirir diferentes estilos de escribir,

pero, siempre que el mensaje sea claro, la diversidad puede ser enriquecedora más que perjudicial.

Veamos ahora algunas consideraciones prácticas sobre el proceso real de redacción de informes. Aunque ya hemos señalado que no podemos ofrecer una lista de instrucciones explícitas para escribir bien, sí existe un principio que, si lo seguimos a nuestro modo, hará mucho más probable que produzcamos una prosa buena y legible. Ya sea que estemos preparando un informe para circulación interna en una organización privada, o un artículo para publicarse en la literatura especializada, hay una persona cuyos intereses deben captar nuestra atención en primer lugar: la persona que se ocupa de leer nuestro informe. Esta persona es, por lo que respecta a nuestro informe, la más importante del mundo, y haríamos muy bien en concentrar nuestra atención en ella. Es muy probable que nuestros lectores sean personas que no conocemos, tal vez en algún sitio lejano del mundo, y es muy posible que no sepan nada más de nosotros o de nuestro trabajo, excepto por el informe que tienen en sus manos. Es probable que sólo tengamos una oportunidad de influir en ellos —conforme leen nuestro informe—, y el informe debe hacerlo por sí solo. No podemos colocarnos detrás del hombro de nuestro lector, y añadir explicaciones o aclaraciones cuando encuentre dificultad para entender lo que hemos escrito. No sólo debe el informe sostenerse por sí mismo, sino que el resultado de su lectura debe ser sumamente significativo. El reconocimiento público a nuestro trabajo, la oportunidad de que otros se beneficien de él, nuestra propia reputación, tal vez hasta nuestras oportunidades de empleo o de promoción, pueden depender de esos pocos minutos en que el lector avanza a lo largo de nuestro informe. ¿Necesitamos mayor convencimiento de que debemos tomar la redacción en serio?

Por lo que respecta al lenguaje, otrora ha sido práctica común recomendar un estilo de expresión distante y despersonalizado, caracterizado por el uso de la voz pasiva y las construcciones impersonales. Parece haber pocas razones para perpetuar ese lenguaje ampuloso, y podemos informarle sencillamente a nuestro lector de lo que hicimos en el experimento; p.ej.: “medimos el tiempo de caída usando un temporizador electrónico cuya precisión era de 1 milisegundo”. Dado que no hay una sola forma “correcta” de redactar un informe experimental, debemos sentirnos en total libertad de usar el lenguaje y formas de expresión como éstas en tanto nos permitan expresar nuestros pensamientos en la forma más clara, atractiva y convincente posible. Para una valiosa orientación relativa al estilo redaccional, consulte la obra de Strunk y White señalada en la Bibliografía.

Consideraremos ahora las diferentes secciones del informe por orden, vistas todas desde la perspectiva de nuestro importantísimo lector.

## 7-2 EL TITULO

El título es probablemente la primera parte del informe que llama la atención de nuestros lectores. Como ellos casi siempre son personas ocupadas en muchos menesteres que compiten por su atención, nuestro informe captará ésta sólo si el título es informativo, apropiado y atractivo. Sin ser muy largo, deberá especificar con toda claridad el tema del informe. Por ejemplo, si el propósito de nuestro experimento es medir el calor específico de un fluido empleando calorimetría de flujo continuo, podríamos usar esto directamente como título: "Medición del calor específico del agua empleando calorimetría de flujo continuo". Es útil señalar que en este título se responde a tres preguntas: a) ¿El trabajo es experimental o teórico? Esto es, ¿estamos informando de una medición o un cálculo? b) ¿Cuál es el tema del trabajo? c) ¿Qué método general usamos? La consideración de estas tres cuestiones casi siempre resultará en una buena elección de título. Una sugerencia práctica es evitar el uso de "el" o "la" como la primera palabra del título. Los títulos a veces se incluyen en listas en orden alfabético, y los lectores pueden tener más dificultades para identificar nuestro trabajo si hay muchas referencias que empiecen con "El" o "La".

## 7-3 EL FORMATO

Las secciones que siguen presentan un análisis detallado de las distintas partes de un informe. Las diversas subsecciones que se describirán no deben usarse como encabezados en un informe real. Aunque la práctica variará desde luego según las circunstancias, los informes sobre la mayor parte del trabajo normal de un primer curso de laboratorio de física requerirán sólo de un mínimo de divisiones. Las secciones esenciales de un informe son:

INTRODUCCION  
PROCEDIMIENTO  
RESULTADOS  
ANALISIS

y éstas deberán emplearse como punto de partida. Los encabezados de sección deben ser claros, sencillos, y estar escritos en mayúsculas de imprenta. Las subsecciones en cada una de estas secciones principales se incluirán sólo si la extensión o complejidad del informe las hace indispensables para la comprensión del tema. Por supuesto, podrán establecerse otras secciones principales de

acuerdo con las exigencias de experimentos particulares. Algunas posibilidades que se sugieren son:

TEORIA  
PREPARACION DE MUESTRAS  
CALCULOS DE INCERTIDUMBRE  
etc.

Para conseguir que el informe sea tan incitante a la lectura y tan fácil de entender como sea posible, éste deberá contener un hilo de argumentación lógico y claro, y no debemos permitir que nada interrumpa la continuidad del discurso. Si nos parece que tenemos que incluir alguna descripción particular de suyo extensa y detallada que pudiese romper la libre continuidad de la argumentación principal, conviene considerar incluirla como apéndice al informe. En esta forma, todos los detalles estarán disponibles para cualquier lector interesado, y la continuidad de nuestro discurso no se verá afectada.

Veamos ahora en detalle cada sección del informe.

## 7-4 LA INTRODUCCION

### a) Indicación del tema

Si nuestro título es eficaz, podemos suponer que ya hemos atraído la atención del lector y que él ha tomado nuestro informe para leerlo. Sin embargo, casi con certeza él comenzará de cero, o casi, en lo que se refiere a nuestro experimento, y conforme se dispone a leer, nuestra primera tarea es orientar su reflexión hacia nuestra particular área de estudio. No vamos a lograrlo si de inmediato nos metemos en detalles fuera de concierto respecto del experimento. En vez de ello, pensemos en la afirmación más general que podemos hacer sobre el experimento, y expresémosla directamente; por ejemplo: “Es posible medir la aceleración de la gravedad empleando la oscilación de un péndulo simple”. De esta manera, llevaremos a nuestro lector de su estado inicial de ignorancia a un conocimiento directo del tema específico de nuestro trabajo.

### b) Revisión de la información existente

En este punto, la reacción natural de nuestro lector será esperar algún tipo de recordatorio sobre la información básica relativa a esta área en particular. Podemos atender esta necesidad dándole un breve resumen del estado del conocimiento actual relativo a nuestro experimento. Esto podría incluir, según se re-

quiera, algunos aspectos de la historia sobre el tema o un resumen del trabajo experimental anterior. Con todo, hay además dos temas que no son discrecionales y que deben incluirse en cada informe de un experimento: uno es un enunciado claro del sistema y las circunstancias experimentales con las que tratamos; el otro, una descripción del modelo o modelos que estamos usando.

En general, lo mejor es presentar este resumen con toda concisión, so pena de confundir la línea principal de argumentación, aunque lo suficientemente detallado para que incluya todos los aspectos de la situación que sean imprescindibles para la comprensión del resto del informe. En atención a la concisión y la claridad, sin embargo, no debe incluirse la derivación de resultados teóricos estándar asociados con el modelo. (No obstante, la forma en que estos resultados estándar se manejen para referirse a nuestro sistema en particular es otra cuestión, pues esto es algo específico de *nuestro* experimento, y será tratado más adelante en nuestro informe.) Habrá que señalar también el comportamiento del modelo, simbolizado por las ecuaciones fundamentales que hayamos empleado, y en esta etapa es importante mencionar cualesquiera suposiciones consideradas en el modelo que pudiesen limitar la validez de las ecuaciones, por ejemplo: “Se puede demostrar que, en el límite de amplitudes cada vez más pequeñas de oscilación, el periodo de oscilación de un péndulo simple, considerado éste como un punto con masa en el extremo de un hilo sin masa e inextensible, está dado por. . .”. Para compensar la omisión de las derivaciones usuales, quizá nos parezca deseable incluir en nuestra bibliografía una fuente en la que pueda consultarse la derivación completa.

#### c) Aplicación de la información al experimento específico

Basado en el contenido de la sección precedente, nuestro lector estará preparado para entender todo lo que sigue del informe, y su reacción natural en este punto será preguntarse: ¿En qué forma se refiere todo esto a este experimento en particular? Deberíamos, por tanto, presentar un párrafo o dos que expliquen cómo la información básica, como la ecuación que representa el comportamiento del modelo, puede transformarse para fundamentar nuestro experimento en particular. Por lo común esto incluirá algún procedimiento como expresar la ecuación básica en forma de línea recta (o algún equivalente adecuado), e identificar las formas en las que el modelo puede confrontarse con el sistema. También podemos señalar en este punto la información que se obtendrá de los parámetros de la gráfica (como la pendiente y la coordenada al origen en el caso de una gráfica de línea recta). Nuestro lector, entonces, estará perfectamente consciente de la forma en que se obtendrá nuestro resultado final.

#### d) Resumen de la intención del experimento

Es muy satisfactorio para el lector si concluimos nuestra introducción con un resumen de nuestra intención específica en el experimento. Por ejemplo: “Así, mi-

diendo la variación del índice de refracción con la longitud de onda, debemos ser capaces de comprobar el modelo de Cauchy usando una gráfica de  $n$  vs.  $1/\lambda^2$ . Los valores de los coeficientes de Cauchy,  $A$  y  $B$ , que son adecuados para nuestra muestra de vidrio, se obtendrán entonces de la ordenada al origen y pendiente de la recta, respectivamente”. Una afirmación como ésta satisface al lector porque, particularmente en un experimento largo y complicado que requiera una introducción extensa, le ofrece una revisión, en forma de resumen, del desarrollo total del experimento, preparándolo con ello para proseguir con la descripción de su desarrollo pormenorizado.

#### e) Enunciado del propósito del experimento

Quizás ya notó que todavía no hemos mencionado el tradicional enunciado del propósito del experimento. Se ha omitido hasta ahora porque, aunque indudablemente debe aparecer en alguna parte de la introducción, no tiene éste una ubicación de validez exclusiva. Si el tema del experimento es conocido, el enunciado en cuestión podría constituir una adecuada indicación del tema, justo al principio de la introducción; por ejemplo: “El propósito de este experimento es medir la aceleración de la gravedad registrando el tiempo de caída de un objeto que cae libremente”. En circunstancias apropiadas, este enunciado de propósito puede ser una excelente indicación del tema. Por otra parte, el propósito básico de un experimento puede entrañar materias tan complicadas y poco conocidas, que su enunciado sería completamente incomprensible, a menos que se presentase después de una sustancial cantidad de conceptos preliminares. Es fácil imaginar una compleja descripción teórica que concluyese provechosamente con la frase: “. . . y el propósito de este experimento es evaluar el coeficiente  $k$  de la ecuación 10”. Así pues, no importa mucho dónde aparezca el enunciado de nuestro propósito, siempre que se incluya y lo haga en un punto de la introducción donde venga bien y tenga un sentido adecuado para el lector.

La introducción sirve una variedad de propósitos para nuestro lector. Justo al principio, la indicación del tema orienta su atención a nuestra área particular de trabajo. Luego se le recuerda al interesado el estado del conocimiento vigente referido al campo considerado. A continuación, se le muestra cómo se aplica todo ello a nuestro experimento en particular. Por último, se le da un resumen sucinto de nuestra intención experimental específica. Ahora sí, está preparado para enterarse de cómo llevamos a cabo, en efecto, el experimento paso a paso.

## 7-5 EL PROCEDIMIENTO

Es posible que haya advertido que la sección introductoria del informe presenta la forma de una secuencia descriptiva que va de lo general a lo específico.

Empezamos con una indicación del tema, que es la afirmación más general que pudimos hacer sobre el experimento, y terminamos con un enunciado de intención completamente específico. Una secuencia como ésta está diseñada para adaptarse a los requerimientos de nuestro lector en la sección introductoria, y otra estructura similar será igualmente adecuada para la sección del procedimiento. Si nos diésemos de inmediato a la tarea de describir nuestro procedimiento dando un cúmulo de detalles desorganizado, lo único que lograríamos sería irritar al lector. ¿Cómo podría apreciar éste el sumo cuidado que tuvimos en algún detalle del experimento si no está consciente siquiera de las variables que medimos? Al redactar la sección de procedimiento, debemos tener tanta consideración por los esfuerzos mentales de nuestro lector como la tuvimos en la introducción, y no hay duda que hace falta una segunda secuencia de lo general a lo específico.

#### a) Bosquejo del procedimiento

Para disponer el terreno adecuado a nuestra exposición ulterior de los detalles del procedimiento y las mediciones, en primer lugar debemos ofrecerle al lector una mirada retrospectiva del proceso integral del experimento. Si éste realmente consistió en medir la variación de la resistencia eléctrica de un alambre de cobre con la temperatura en el intervalo de  $20^{\circ}\text{C}$  a  $100^{\circ}\text{C}$ , debemos decir justamente eso; así le proporcionaremos al lector un marco dentro del cual puede acomodar toda la descripción subsiguiente de los detalles. Si, en cambio, empezamos nuestra descripción del procedimiento informando que conectamos la terminal A a la terminal B, encendimos la fuente de poder C, leímos al voltímetro D, . . . etc., habremos perdido su atención en un par de renglones.

#### b) Detalles de medición específicos

Una vez que nuestro lector conoce el curso general del experimento, está listo para que le informemos de los métodos específicos empleados para medir cada una de las magnitudes requeridas, de cómo llevamos a cabo la preparación de muestras, etc. Esto se puede hacer con mucha facilidad explicando un solo método a la vez, hasta agotar la lista. Debemos cerciorarnos de no omitir ningún método de medición significativo; en algo como una medición de tiempo, por ejemplo, es, casi sin duda, muy importante el que usemos un temporizador electrónico con exactitud de milisegundos, en vez de un cronómetro que sólo puede registrar hasta  $\frac{1}{5}$  de segundo, y nuestro lector querrá asegurarse de que así lo hicimos. Si una magnitud del experimento se pudo medir empleando alguna técnica normal y conocida, bastará con mencionarla por su nombre; por ejemplo: "Las resistencias se midieron usando un puente de Wheatstone con una exactitud de 0.01%". Si en nuestra opinión esta exactitud es poco usual, podemos abundar en esta etapa acerca de la precisión de cualquier proceso de medición en particu-

lar, al tiempo que observamos que la precisión final del experimento es un tema distinto que será tratado en una sección posterior del informe.

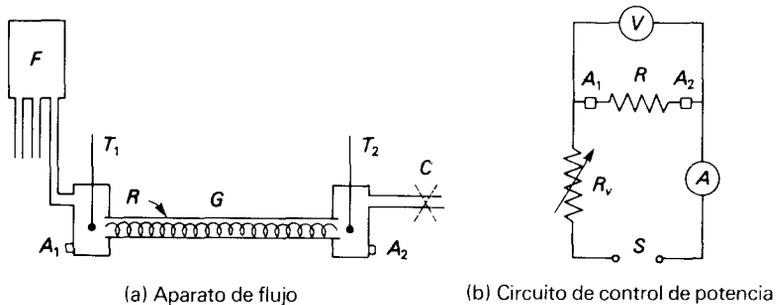
#### c) Precauciones

Ya que nuestro lector se ha enterado de los métodos mediante los cuales hicimos cada una de nuestras mediciones, es posible que vengan a su mente las dificultades o riesgos de error inherentes a los procesos particulares. Por consiguiente, él apreciará tener constancia de que nosotros también pensamos en esas posibilidades y de que fuimos lo bastante cuidadosos para tomar las precauciones necesarias. No obstante, en este cometido tampoco debemos irnos a los extremos: es obvio que hay que ser meticulosos en todas las mediciones, y no tiene **sentido** molestar al lector con pretensiones superfluas de virtud al describir precauciones obvias y de rutina. Hay veces, sin embargo, en que un especial cuidado para evitar alguna fuente particular de error es una parte genuinamente importante del experimento, y es del todo razonable llamar la atención al respecto antes de concluir nuestra sección de procedimiento.

#### d) Diagramas de los aparatos

Los buenos diagramas de aparatos experimentales son una parte prácticamente esencial de cualquier buen informe. En tanto que un artículo publicado formalmente requiere de ilustraciones de calidad profesional, y tales recursos no están disponibles para el trabajo preliminar, debemos adquirir desde temprano el hábito de ser esmerados en los diagramas de los aparatos. Aun cuando no se disponga de auxiliares de dibujo complejos, no es mucho pedir que se utilice una regla. La limpieza y la claridad serán muy apreciadas por el lector, y unos rótulos bien hechos y legibles lo ayudarán enormemente a entender nuestro experimento. Los buenos diagramas también pueden ayudarnos, cuando escribimos el informe. Referirnos a un buen diagrama, claro y bien rotulado, nos puede ahorrar párrafos enteros de descripción por escrito, y clarificará pormenores que serían insoportablemente tediosos de leer si estuvieran incluidos en el texto.

La referencia a los diagramas puede, por supuesto, hacerse en cualquier punto adecuado del texto, pero la referencia a un diagrama general de nuestro dispositivo experimental completo puede constituir un inicio claro y conveniente para la sección de procedimiento; por ejemplo: "Utilizando el aparato que se muestra en la figura 1, medimos la variación del tiempo de caída de un balón con la altura, en el intervalo de 20 a 150 cm". En la figura 7-1 puede verse un ejemplo de un diagrama de dispositivo experimental aceptable.



F — Aparato de flujo constante  
 $T_1, T_2$  — Termómetros de 0 - 100°C  
 G — Tubo de vidrio  
 C — Abrazadera de manguera de hule  
 R — Alambre calefactor  
 $A_1, A_2$  — Terminales eléctricas de R

S — Fuente de 100 V CC  
 $R_v$  — Reóstato de 80  $\Omega$   
 V — Voltímetro 0 - 30 V CC  
 A — Amperímetro 0 - 10 A CC

Figura 7-1 Diagrama de dispositivo experimental completo.

## 7-6 RESULTADOS

### a) Valores medidos

A estas alturas se le ha dado ya al lector toda la información que necesita para entender el experimento, y está listo para recibir directamente los resultados. Como todo buen experimento casi inevitablemente tendrá que ver con la variación de alguna magnitud con otra, los resultados sin duda podrán apreciarse mejor en una tabla. Aquí, como siempre, la claridad y la precisión son de máxima importancia. Las líneas de la tabla deben trazarse con una regla, y hay que destinar un espacio amplio para los encabezados y para las columnas de cantidades. Los encabezados deben ser explícitos, e incluir, de ser posible, el nombre de la variable, su símbolo y las unidades de medida. Junto a cada entrada numérica, debe estar su incertidumbre respectiva, a menos que un análisis de las incertidumbres por separado clarifique del todo la precisión de las medidas. La tabla o tablas deberán identificarse claramente con un número de tabla y un encabezado o pie claros. En este punto puede ser conveniente referirse a las gráficas de las variables originales que hayamos dibujado. Será suficiente un enunciado sencillo como "Se encontrará una gráfica del tiempo de caída vs. la altura en la figura 2". Aquellas tablas de valores que por su extensión y prolijidad no convenga incluirlas en el cuerpo principal del informe pues interrumpirían la continuidad normal del discurso, deberán presentarse en un apéndice.

Después de la tabla o tablas principales, debemos enlistar los valores medidos de las demás magnitudes del experimento. Como siempre, cada una de éstas deberá acompañarse de su incertidumbre, y es preciso indicar con claridad las unidades de medida empleadas.

#### b) Descripción de las incertidumbres de la medición

Debemos especificar claramente la clase de incertidumbres que estamos considerando. Es muy probable que se trate, ya sea de límites extremos estimados, o de parámetros estadísticos como la desviación estándar o la desviación estándar de la media. En el caso de parámetros estadísticos no debemos dejar de señalar la cantidad de observaciones en la muestra de la que se derivaron los resultados. Si cualesquiera cantidades en nuestra lista de valores medidos se obtuvieron por el cálculo a partir de alguna o algunas mediciones básicas, debemos indicar llanamente el tipo de cálculo que se usó para obtener la incertidumbre final en la cantidad respectiva. En tales casos no hace falta abundar en detalles aritméticos, si es que los hay, toda vez que nuestro lector pueda ver con perfecta claridad el tipo de cálculo aplicado.

#### c) Cálculo del resultado final

Si nuestro experimento ha sido bien diseñado, deberemos haber obtenido nuestro resultado final casi seguramente mediante algún procedimiento gráfico. Este es el momento de decirle al lector exactamente de qué procedimiento se trata. En casos sencillos podemos obtener nuestro resultado de la gráfica básica de una variable contra la otra, pero aun así, debemos explicar cumplidamente lo que hemos hecho; por ejemplo: “el valor de la resistencia se obtuvo de la pendiente de la gráfica (que se muestra en la figura 3) de  $V$  vs.  $I$ , entre 0.5 A y 1.5 A”. Si nuestro resultado no fue la pendiente misma, pero se obtuvo a partir de cálculos con otras cantidades medidas, debemos, una vez más, especificar explícitamente lo realizado; por ejemplo: “Nuestro valor del coeficiente de viscosidad se obtuvo de la pendiente de la gráfica de  $Q$  vs.  $P$  en combinación con los valores medidos de  $a$  y  $l$  usando la ecuación (3)”,

En esta etapa nuestro lector se preguntará qué tipo de cálculo realizamos para obtener la incertidumbre del resultado final. Debemos, simplemente, decir lo que hemos hecho. Si evaluamos visualmente el intervalo de pendientes posible, debemos señalar precisamente eso. Podemos agregar, si es necesario, que la incertidumbre básica de la pendiente se combinó con otras incertidumbres, y especificar con precisión el método de cálculo empleado. Si obtuvimos la pendiente por un cálculo de mínimos cuadrados e incorporamos otras desviaciones estándar para obtener un valor final de la incertidumbre del resultado, de nueva cuenta habrá que especificar con sencillez lo que hemos hecho.

En toda nuestra sección de resultados, no debemos importunar a nuestro ocupado lector con cálculos innecesariamente detallados. El confiará en nuestro dominio de la aritmética elemental, pero querrá saber qué tipo de cálculo hicimos. No obstante, si por alguna razón nos sentimos obligados a presentar una cantidad desusada de detalles respecto a esos cálculos, siempre podemos incluirlas en un apéndice, donde estarán disponibles para cualquier interesado, pero no oscurecerán la claridad de nuestro informe principal.

## 7—7 LAS GRAFICAS

La gráfica, o gráficas, del informe difieren de las gráficas que utilizamos al hacer el experimento. Esas gráficas eran documentos de trabajo diseñados como auxiliares de cálculo. Para un experimento preciso, las gráficas posiblemente sean muy grandes, y deben dibujarse a conciencia para permitir una extracción precisa de la información. Por otro lado, es extremadamente poco probable que nuestro lector quiera hacer cualquier cálculo por su cuenta basándose en las gráficas de nuestro informe. Estas sirven en su mayor parte como ilustraciones. Deben permitirle al lector ver el comportamiento de nuestro sistema, y con ello facilitarle su propia apreciación de la validez de nuestras afirmaciones sobre los resultados.

Las gráficas de nuestro informe deben ser, por supuesto, limpias, claras y no estar atestadas, de modo que el lector no tenga que esforzarse mucho para interpretar su mensaje. Los puntos de las gráficas deben tener sus incertidumbres bien marcadas sobre ellos (con un rectángulo o una cruz), y los ejes están debidamente identificados. Tanto el tipo de incertidumbre como cualquier símbolo empleado para rotular los ejes deberán de identificarse explícitamente, en forma clara, sobre o junto a la gráfica; no querríamos irritar a nuestro lector obligándolo a buscar por todo el texto para encontrar la forma de interpretar la gráfica. Por otra parte, no es conveniente aprovechar espacios vacíos en la gráfica con cálculos aritméticos de pendientes, etc. Cada gráfica debe tener, desde luego, un título claro o, como es más común en las publicaciones impresas, un pie más extenso. Además de proporcionar la identificación, un pie extenso tiene la ventaja adicional de constituir un buen lugar para los detalles importantes mencionados arriba. En la figura 7-2 se da una muestra de distribución aceptable para una gráfica ilustrativa de ese tipo.

## 7—8 EL ANALISIS

### a) Comparación entre el modelo y el sistema

El análisis es una parte integral del informe, y no una reflexión posterior. Es así porque aún no hemos descrito el aspecto del experimento que hemos considera-

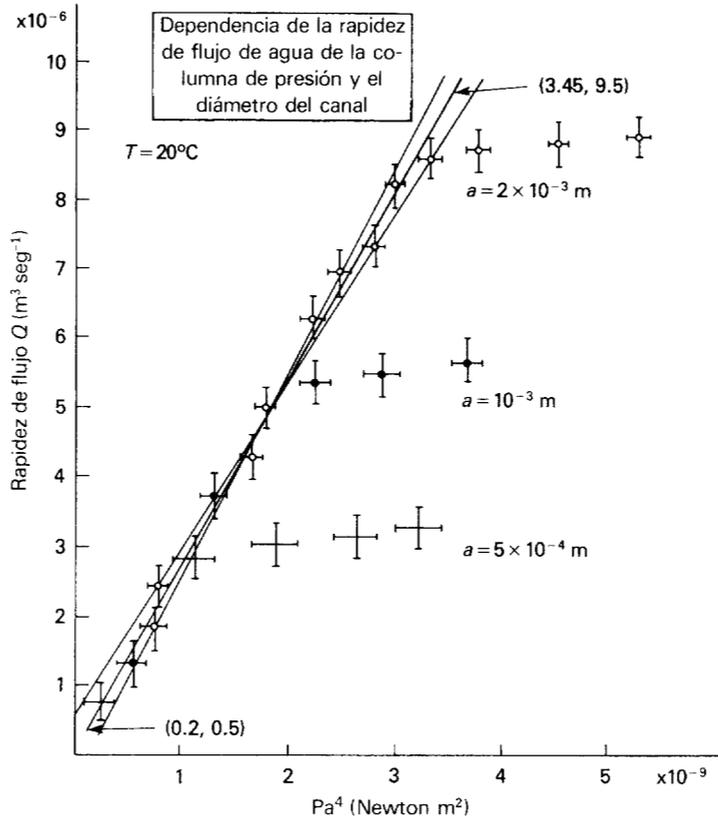


Figura 7-2 Una gráfica completa.

do, desde un principio, como el tema central de la experimentación: la relación entre el sistema y el modelo. El resultado de esta comparación es decisivo para el experimento, y nuestro lector estará ansioso por saber lo que tengamos que decir al respecto.

Ya hemos enlistado en la sección 6-11 las diferentes categorías de resultados experimentales. Recordando que, en la evaluación de nuestros resultados, tuvimos que desligarnos de nuestras esperanzas y aspiraciones sobre el experimento y aceptar objetivamente el resultado real, así ahora, en la etapa del informe, debemos hacer una afirmación franca y desprejuiciada de ese resultado. Lo deseable es un enunciado simple y directo de la situación real; por ejemplo: "El comportamiento del modelo lo representa la ecuación (1), en la cual la variación de  $Q$  con  $P$  es una línea recta que pasa por el origen. En nuestro experimento, los

resultados sí mostraron una variación lineal sobre parte del rango, pero, en vez de pasar por el origen, la línea que mejor se ajusta a las observaciones tiene un intercepto finito en el eje de las  $Q$ s. Además de esto, en la parte superior de la escala de  $P$ , las observaciones muestran una desviación sistemática de la linealidad en una cantidad que evidentemente excede la incertidumbre de la medición”.

En esta etapa es suficiente hacer esa afirmación llana de los hechos. Como tal comparación era el objetivo fundamental de nuestro experimento, es necesario que su resultado se especifique en forma clara, notoria y objetiva. En nuestro informe muy pronto trataremos cuestiones de interpretación y de opinión, y es importante comenzar nuestra sección de análisis con un enunciado simple y directo del resultado real e indisputable del experimento.

Este enunciado provocará algunas interrogantes en la mente de nuestro lector, y debemos ahora ocuparnos de éstas.

**b) Consecuencias de las discrepancias entre el modelo y el sistema**

Una de estas interrogantes tiene que ver con la posibilidad de error en nuestro resultado final que estaría causada por una falta de correspondencia entre nuestro sistema y el modelo que usamos. Algunas de esas posibilidades ya se han mencionado en la sección 4-5, y nuestro lector apreciará la garantía de que hemos preservado nuestro resultado final de esa clase de error. Por ejemplo, debemos señalar que una coordenada al origen inesperada no contribuirá a error en una cantidad que se ha obtenido solamente de la pendiente, o que una falla sistemática de linealidad en parte de la gráfica no invalidará un resultado que se obtuvo sólo del segmento lineal. Mucha de la habilidad en la experimentación consiste en la preservación de nuestros resultados finales de esas fuentes de error, y podemos ser muy explícitos con nuestras afirmaciones de haberlo hecho así: nuestro lector apreciará esa garantía.

**c) Especulación concerniente a la discrepancia entre el sistema y el modelo**

Al describir las secciones anteriores del informe hemos hecho hincapié en la información objetiva y apegada a los hechos de la situación real. Las cuestiones de opinión o de conjetura no debían tener un papel importante en esas partes del informe, y probablemente nos hayamos limitado a aquellas afirmaciones que habrían hecho los observadores más imparciales. Sin embargo, ahora llega una etapa en la cual no sólo podemos, sino debemos introducir nuestras propias ideas. Nuestro lector ha sido informado a su tiempo del grado real de correspondencia entre nuestro sistema y el modelo, y le hemos asegurado que nuestro resultado

final no está contaminado (hasta donde podemos saberlo) por alguna falla de correspondencia entre el sistema y el modelo. Podríamos, además, con sobrada justificación ya que hemos cumplido nuestras obligaciones básicas como experimentadores, dar por concluido aquí el informe. Sin embargo, sin duda habremos despertado el interés de nuestro lector con nuestra descripción de las discrepancias entre el modelo y el sistema. Supuestamente empezamos con un modelo que se escogió para ajustarse al sistema tan exactamente como fue posible. Si se hubiera anticipado cualquier falta de correspondencia entre el modelo y el sistema, se habría incorporado esta ruptura en nuestro diseño del experimento. Si, por ejemplo, queremos medir un coeficiente de viscosidad empleando teorías que se basan en el flujo laminar, no diseñamos el experimento para que se lleve a cabo en condiciones de flujo turbulento (excepto si, por algún propósito independiente, queremos detectar cuándo se establece la turbulencia). Por tanto, lo más probable es que una falta de correspondencia observada atraiga la atención, y nuestro lector querrá saber lo que pensamos de ella. Estamos más familiarizados que nadie con nuestro experimento, y debemos estar en mejor posición que otros para inferir el origen de las discrepancias.

A veces una discrepancia tendrá (al menos superficialmente) un origen que es fácil de identificar. Si, por ejemplo, hemos estado midiendo la rapidez de flujo de un fluido por un tubo, el que las medidas de rapidez de flujo se aparten por debajo del comportamiento lineal a valores elevados de la diferencia de presión, se puede atribuir con bastante confianza al establecimiento de la turbulencia. Si nuestros objetivos experimentales incluyeron la detección del establecimiento de la turbulencia, con esa afirmación daríamos por terminado el asunto. En otras ocasiones, sin embargo, es necesaria una mayor explicación. Si, en el ejemplo anterior, nuestra intención hubiera sido simplemente medir el coeficiente de viscosidad en la parte lineal de la variación de  $Q$  y  $P$ , nuestro lector podría preguntarse por qué no habíamos tenido éxito en evitar una región en la cual la teoría de líneas de flujo era claramente inválida. Tal vez nos haya sorprendido un establecimiento temprano e inesperado de la turbulencia, y si así fue, debemos ser lo bastante sinceros para admitirlo, y tal vez especular sobre el origen de esa discrepancia. Si, finalmente, estamos tratando con una situación que es verdaderamente desconcertante, puede ser que no tengamos mucho que ofrecer en lo que respecta a la especulación, pero siempre vale la pena intentarlo. Como dijimos antes, tenemos una mayor probabilidad de especular con provecho que los demás, y nuestras ideas casi con seguridad resultarán de interés y de posible utilidad para otros investigadores.

A veces, empero, pese a nuestros mejores esfuerzos, fallaremos, y no seremos capaces de aportar ninguna idea constructiva. En este punto debemos actuar con total honradez. Si estamos tratando con un sistema bien comprobado y un modelo confiable y bien conocido, y hemos procurado honradamente re-

solver una falta de correspondencia entre ellos y hemos fallado, nuestra situación no puede dejar de interesar a otros investigadores. Debemos comentársela, y tal vez todos aprendamos algo de la discusión resultante.

Cuando intentemos ser creativos con respecto a nuestras discrepancias experimentales, debemos recordar que estamos haciendo algo importante. Todos los modelos y las teorías pasan por procesos de refinamiento, y esos procesos se basan en los diversos casos de fallas observadas en los modelos. Por tanto, debemos procurar responsabilizarnos al especular en nuestro trabajo. En vez de lanzarnos con cualquier idea absurda que imaginemos, debemos tratar de conseguir que nuestras sugerencias tengan alguna conexión lógica con la evidencia de las discrepancias. Por ejemplo, si hemos hecho un experimento con la oscilación de un peso colgado de un resorte, podemos consignar: "Como la ordenada al origen inesperada en la gráfica de  $T^2$  vs  $m$  da un valor finito de  $T$  para  $m = 0$ , tenemos una clara indicación de la presencia de una masa adicional que no estaba incluida en los valores medidos de peso". Si podemos inferir o no la identidad de esa masa adicional, es menos importante; lo esencial es que, al menos, habremos aportado una inferencia lógicamente aceptable a partir de la naturaleza de la discrepancia observada, facilitando con ello la investigación y experimentación ulteriores en ese campo.

# Apéndice 1

## Propiedades matemáticas de la distribución normal o de Gauss

### A1—1 LA ECUACION DE LA CURVA DE DISTRIBUCION DE GAUSS

Consideremos ahora que una magnitud, cuyo valor verdadero es  $X$ , está sujeta a incertidumbre al azar. Consideremos que la incertidumbre surge de un cierto número  $2n$ , de errores, cada uno de magnitud  $E$ , y con la misma probabilidad de ser positivo o negativo. El valor medido  $x$  puede entonces variar en el intervalo que va desde  $X - 2nE$ , si ocurre que todos los errores tienen signo negativo, hasta  $X + 2nE$  si todos los errores tienen signo positivo. Los valores intermedios obviamente surgirán de diferentes combinaciones entre las contribuciones positivas y negativas. Queremos determinar la forma de la curva de distribución resultante para un número muy grande de tales mediciones. Esta forma la determinará la probabilidad de encontrar un error particular  $R$  dentro del intervalo completo  $\pm 2nE$ . Esta probabilidad estará gobernada por el número de maneras en que se puede generar un error particular.

Por ejemplo, un error de valor total  $2nE$  se puede generar de sólo una manera: todos los errores elementales deben tener simultáneamente el mismo signo. Por otra parte, un error de magnitud  $(2n - 2)E$  puede ocurrir de varias maneras; si alguno de los errores elementales hubiera sido negativo, el error total sumaría  $(2n - 2)E$ , y esta situación se puede presentar de  $2n$  maneras diferentes. Por lo tanto, un error de magnitud  $(2n - 2)E$  es  $2n$  veces más probable

que uno de magnitud  $2nE$ . Correspondientemente, una situación en la que dos de los errores elementales tienen signo negativo puede generarse de muchas más maneras que para uno solo, y así sucesivamente.

Por lo tanto, este argumento se puede generalizar, utilizando el número de maneras en las que se puede generar cada error específico  $R$ , como medida de la probabilidad de ocurrencia del error  $R$  y, en consecuencia, como medida de la frecuencia con que ocurre en un universo de observaciones.

Consideremos un error total  $R$  de magnitud  $2rE$  (en donde  $r < n$ ). Este debe ser el resultado de alguna combinación de errores en la cual  $(n + r)$  son positivos, y  $(n - r)$  son negativos. El número de maneras en que esto puede ocurrir se puede calcular como sigue: el número de maneras de seleccionar cualquier arreglo particular de  $2n$  objetos es  $(2n)!$ . Sin embargo, no todos esos arreglos son diferentes para nuestros propósitos, ya que no nos importa si hay cualquier *rearrreglo interno* entre los errores en, digamos, el grupo de los errores positivos. Debemos por lo tanto dividir el número total de arreglos entre el número de estos arreglos irrelevantes, esto es, entre  $(n + r)!$ . En forma semejante, debemos dividir entre el número de arreglos internos posibles en el grupo negativo; esto es, entre  $(n - r)!$ . El número total de combinaciones relevantes es, por lo tanto:

$$\frac{(2n)!}{(n + r)!(n - r)!}$$

Esta cantidad no es aún estrictamente una probabilidad, aunque es una medida de la posibilidad de encontrar ese error total. La probabilidad misma se obtendrá multiplicando el número de arriba por la probabilidad de esta combinación de  $(n + r)$  elecciones positivas y  $(n - r)$  negativas. Como la probabilidad de cada elección es de  $\frac{1}{2}$ , el multiplicador requerido es:

$$\frac{1}{2}^{(n+r)} \frac{1}{2}^{(n-r)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

El resultado final para la probabilidad del error  $R$  es entonces:

$$\frac{(2n)!}{(n + r)!(n - r)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+r)} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-r)} \quad (\text{A1-1})$$

Ahora nuestro problema es evaluar esta expresión en función de la variable  $r$ . Eso se hace sujetándola a la condición de que  $n$  sea muy grande; de hecho, que tienda a infinito.

Para evaluarla, requerimos de dos resultados auxiliares.

1. El primer resultado auxiliar es:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$$

Este se conoce como el *teorema de Stirling*. Aunque una derivación completa está fuera del nivel de esta obra, podemos indicar su factibilidad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x \, dx &= [x \log x - x]_1^n \\ &= n \log n - n + 1 \end{aligned}$$

La gráfica de  $\log x$  vs.  $x$  se muestra en la figura A1-1. Claramente la integral anterior se puede aproximar por la suma:

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots + \log n$$

que es  $\log(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)$ , o  $\log n!$ . Podemos por lo tanto, escribir aproximadamente, si  $n$  es muy grande:

$$\log n! = n \log n - n$$

esto es,

$$n! = e^{-n} n^n$$

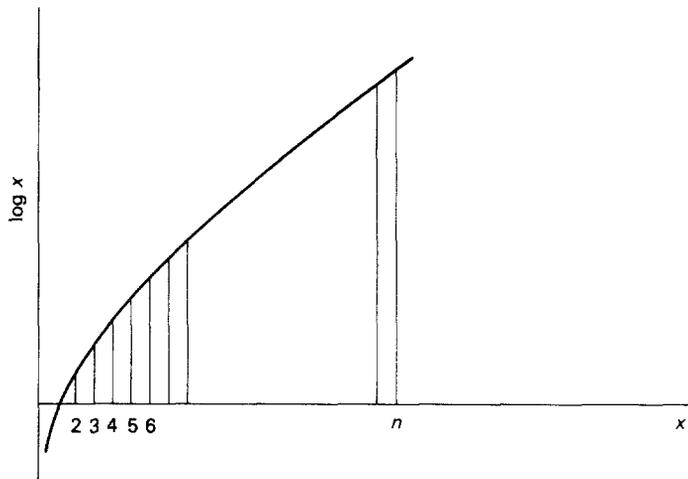


Figura A1-1 Gráfica de  $\log x$  vs.  $x$ .

Esta es una aproximación a la fórmula que se dio arriba. Se encontrará una derivación completa en el texto de Margenau y Murphy que se menciona en la Bibliografía.

2. El segundo resultado auxiliar es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

La expansión de  $[1 + (1/n)]^n$  es:

$$1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots$$

Conforme  $n$  se hace más grande, todos los productos en función de  $n$  claramente tienden a la unidad, de modo que la serie tiende a:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

como se requiere.

Ahora estamos en posición de evaluar la expresión (A1-1). Aplicando el Teorema de Stirling a los términos  $(2n)!$ ,  $(n+r)!$  y  $(n-r)!$ :

$$\begin{aligned} (2n)! &= (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n} = 2^{2n} n^{2n+(1/2)} e^{-2n} \sqrt{4\pi} \\ (n+r)! &= (n+r)^{n+r} e^{-(n+r)} \sqrt{2\pi(n+r)} \\ &= n^{n+r+(1/2)} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n+r+(1/2)} e^{-n-r} \sqrt{2\pi} \\ (n-r)! &= n^{n-r+(1/2)} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-r+(1/2)} e^{-n+r} \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(n+r)!(n-r)! = n^{2n+1} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{n+(1/2)} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^r \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{-r} e^{-2n} \cdot 2\pi$$

Ahora podemos escribir la parte variable de (A1-1):

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{-n-(1/2)} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{-r} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^r \\ &= \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{-(n^2/r^2)(r^2/n)} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r(-r^2/n)} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{-n/r(-r^2/n)} \end{aligned}$$

Así pues, se puede escribir la expresión (A1-1) como:

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{-(n^2/r^2)(r^2/n)} \left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r(-r^2/n)} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{-n/r(-r^2/n)}$$

y ahora:

$$\left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{-n^2/r^2} \longrightarrow e \quad \text{cuando} \quad \frac{n}{r} \longrightarrow \infty$$

$$\left(1 - \frac{r^2}{n^2}\right)^{-1/2} \longrightarrow 1$$

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r} \longrightarrow e$$

$$\left(1 - \frac{r}{n}\right)^{-n/r} \longrightarrow e$$

Así que, finalmente, la probabilidad del error  $R$  es:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-r^2/n}$$

La característica significativa de este resultado es la forma  $e^{-r^2}$ . Especifica la probabilidad de un error  $R$  y es por tanto equivalente a la ecuación (3-3), en la cual el error es la diferencia entre el valor verdadero  $X$  y el valor observado  $x$ . El único problema que queda para poner la ecuación en forma normal es redefinir las constantes. Hagamos:

$$hx = \frac{r}{\sqrt{n}}$$

para el exponente, y en la constante reemplacemos  $1/\sqrt{n}$  por  $h dx$ . La ecuación queda entonces como:

$$P(x) dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx$$

en donde  $P(x) dx$  es la probabilidad de encontrar un error entre  $x$  y  $x + dx$ .

## A1-2 DESVIACION ESTANDAR DE LA DISTRIBUCION DE GAUSS

Debemos calcular la suma de los cuadrados de los errores dividida entre el número total de observaciones. Sean  $N$  observaciones, donde se puede suponer que  $N$  es un número muy grande. El número de errores de magnitud entre  $x$  y  $x + dx$  es igual a  $(Nh/\sqrt{\pi})e^{-h^2x^2} dx$ .

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} N \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \cdot x^2 dx \\ &= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx\end{aligned}$$

Esta es una integral conocida y tiene el valor  $\sqrt{\pi}/2h^3$ . Por lo tanto:

$$\sigma^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2h^3} = \frac{1}{2h^2}$$

Esto nos proporciona la justificación para la ecuación (3-4) y nos permite reescribir la función de probabilidad como:

$$P(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

## A1-3 AREAS BAJO LA CURVA DE DISTRIBUCION DE GAUSS

La probabilidad de que un error caiga entre  $x$  y  $x + dx$  es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx$$

Por lo tanto, la probabilidad de que un error esté entre 0 y  $x$  es:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-x^2/2\sigma} dx$$

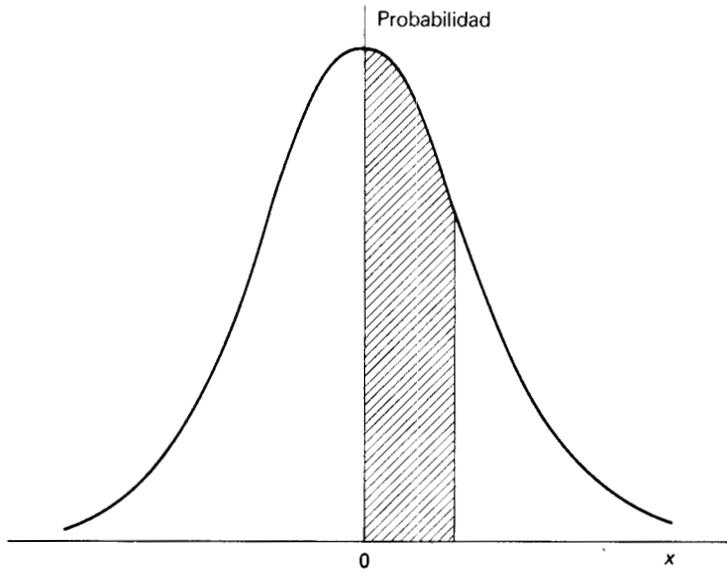
Aunque esta integral se puede evaluar fácilmente para límites infinitos, no es tan sencilla para límites fijos como se requiere ahora.

Se utilizan métodos numéricos de integración, con los resultados que se dan en la tabla A1-1. (Véase la figura A1-2.)

**TABLA A1-1** Áreas bajo la curva de Gauss

$x/\sigma$	Probabilidad de que el error esté entre 0 y $x$
0	0
0.1	0.04
0.2	0.08
0.3	0.12
0.4	0.16
0.5	0.19
0.6	0.23
0.7	0.26
0.8	0.29
0.9	0.32
1.0	0.34
1.1	0.36
1.2	0.38
1.3	0.40
1.4	0.42
1.5	0.43
1.6	0.45
1.7	0.46
1.8	0.46
1.9	0.47
2.0	0.48
2.5	0.49
3.0	0.499

Si requerimos la probabilidad de que un error esté entre  $\pm x/\sigma$ , ese valor debe por supuesto duplicarse. Por ejemplo, el dato para  $x/\sigma = 1$  es 0.34, lo que da la cifra de 68% que hemos estado usando para los límites de  $\pm 1\sigma$ . Se



**Figura A1-2** El área evaluada para calcular la probabilidad de ocurrencia de un error hasta  $x$ .

pretende que esta tabla dé únicamente una indicación de la forma en que varían las probabilidades, y para trabajo estadístico, el lector se debe referir a una de las muchas tablas estadísticas disponibles. (Busque Lindley y Miller en la Bibliografía.)

# Apéndice 2

## El principio de mínimos cuadrados

### A2—1 MINIMOS CUADRADOS Y MEDIAS DE LAS MUESTRAS

Supongamos que hacemos  $N$  observaciones,  $x_i$ , de una magnitud que presenta fluctuaciones al azar. Calculemos luego el valor  $X$ , cuyas desviaciones con respecto a las  $x_i$  se minimizan de acuerdo con el principio de mínimos cuadrados.  $X$  se obtendrá de la condición

$$\sum (x_i - X)^2 = \text{mínimo}$$

Sea  $\bar{x}$  la media de las  $x_i$ . Entonces:

$$\begin{aligned}\sum (x_i - X)^2 &= \sum [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - X)]^2 \\ &= \sum [(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - X)^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - X)]\end{aligned}$$

o, como  $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ ,

$$\sum (x_i - X)^2 = \sum [(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - X)^2]$$

Evidentemente, esta última expresión tiene un valor mínimo cuando  $\bar{x} = X$  confirmando así que el uso de la media como el valor más probable para una muestra es consistente con el principio de mínimos cuadrados.

## A2-2 AJUSTE DE MINIMOS CUADRADOS A UNA LINEA RECTA

Consideremos un conjunto de observaciones  $(x_i, y_i)$  al cual se desea ajustar una relación lineal:

$$y = mx + b$$

Suponemos que los valores de  $x$  son precisos, que toda la incertidumbre está contenida en los valores de  $y$ , y que las ponderaciones de los valores de  $y$  son iguales. Deseamos minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias siguientes:

$$\delta y_i = y_i - (mx_i + b)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (\delta y_i)^2 &= [y_i - (mx_i + b)]^2 \\ &= y_i^2 + m^2 x_i^2 + b^2 + 2mx_i b - 2mx_i y_i - 2y_i b \end{aligned}$$

Si hay  $n$  pares de observaciones, la suma es

$$\begin{aligned} M = \sum (\delta y_i)^2 &= \sum y_i^2 + m^2 \sum x_i^2 + nb^2 + 2mb \sum x_i \\ &\quad - 2m \sum x_i y_i - 2b \sum y_i \end{aligned}$$

La condición para la mejor elección de  $m$  y  $b$  es que  $\Sigma (\delta y_i)^2$  sea un mínimo. Necesitamos, entonces, que

$$\frac{\partial M}{\partial m} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial b} = 0$$

La primera condición da

$$2m \sum x_i^2 + 2b \sum x_i - 2 \sum (x_i y_i) = 0$$

y la segunda

$$2nb + 2m \sum x_i - 2 \sum y_i = 0$$

La resolución del sistema de ecuaciones simultáneas para  $m$  y  $b$  resulta

$$m = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Las desviaciones estándar de  $m$  y  $b$  se pueden calcular como sigue: los valores calculados de  $m$  y  $b$  son funciones de las magnitudes  $y_i$ . Las desviaciones estándar de  $m$  y  $b$  se calcularán, pues, usando la ecuación (3-9) para la desviación estándar de funciones calculadas. Se calcularán en función de la desviación estándar de los valores de  $y$ . Esta se expresa, como la ecuación (6-5), empleando las magnitudes  $\delta y_i$ :

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum (\delta y_i)^2}{n - 2}}$$

No se intentará justificar el valor de  $n - 2$ ; esto se relaciona con el hecho de que las  $\delta y_i$  no son independientes, pero están vinculadas por la existencia de la mejor línea especificada por los valores de  $m$  y  $b$ . La ecuación (3-9) para la desviación estándar de un valor calculado es

$$s^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \dots$$

Aplicamos esta fórmula en nuestro caso notando que las  $x$  y  $y$  de la fórmula son las  $y_1, y_2$ , etc., que forman parte de nuestro conjunto de observaciones. De este modo, la función que define a  $m$  es

$$m = \frac{1}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \left[ nx_1 y_1 - y_1 \sum x_i + nx_2 y_2 - y_2 \sum x_i + \dots \right]$$

Por tanto:

$$\frac{\partial m}{\partial y_k} = \frac{1}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \left[ nx_k - \sum x_i \right]$$

y

$$\left(\frac{\partial m}{\partial y_k}\right)^2 = \frac{1}{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)^2} \left[ n^2 x_k^2 + \left(\sum x_i\right)^2 - 2nx_k \sum x_i \right]$$

Como  $x_k$  es común para todas las contribuciones, podemos sumar las  $(\partial m / \partial y_k)^2$  directamente para obtener

$$\sum_k \left( \frac{\partial m}{\partial y_k} \right)^2 = \frac{1}{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)^2} \left[ n^2 \sum x_i^2 + n \left( \sum x_i \right)^2 - 2n \left( \sum x_i \right)^2 \right]$$

ya que  $\sum x_k = \sum x_i$ , etc.

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_k \left( \frac{\partial m}{\partial y_k} \right)^2 &= \frac{1}{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)^2} \left[ n^2 \sum x_i^2 - n \left( \sum x_i \right)^2 \right] \\ &= \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{aligned}$$

o sea:

$$s_m = s_y \sqrt{\frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}}$$

El valor de  $s_b$  puede obtenerse por el mismo procedimiento.

## A2-3 PONDERACION EN LOS CALCULOS ESTADISTICOS

Cuando realizamos algunos cálculos estadísticos, como para obtener la media de un conjunto de medidas o para ajustar una función a las observaciones usando el principio de mínimos cuadrados, las ecuaciones de las secciones 3-3 y 6-7 son válidas sólo cuando todas las medidas son igualmente precisas. Si estas medidas son de precisión desigual, desde luego es una falacia conceder que éstas contribuyen de igual modo a la respuesta final. Como es lógico, las medidas más precisas deben desempeñar un papel más importante que las menos precisas en los cálculos. Para lograr esto asignamos a las medidas "ponderaciones" que son inversamente proporcionales a los cuadrados de las desviaciones estándar de las observaciones correspondientes. La derivación de las ecuaciones resultantes puede hallarse en los textos clásicos de estadística, y aquí sólo consideraremos los resultados.

a) **Media ponderada de un conjunto de medidas**

Consideremos que tenemos un conjunto de cantidades  $x_i$  medidas independientes, y que conocemos las desviaciones estándar,  $S_i$ , para cada una de las  $x_i$ . La media ponderada del conjunto de valores  $x$  estará dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum \frac{x_i}{S_i^2}}{\sum \frac{1}{S_i^2}}$$

y la desviación estándar de la media ponderada por

$$S^2 = \frac{\sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_i^2}}{(N - 1) \sum \frac{1}{S_i^2}}$$

b) **Ajuste de línea recta por mínimos cuadrados ponderados**

Consideremos que tenemos un conjunto de valores de una variable  $y$  medidos como función de  $x$ . Como en la sección 6-7, supondremos que los valores de  $x$  son precisos y que toda la incertidumbre se limita a los valores de  $y$ . Las ecuaciones por las cuales podemos calcular la pendiente  $m$  y la ordenada al origen  $b$  de la mejor línea puede expresarse como sigue:

$$m = \frac{\sum wy \sum wx^2 - \sum wx \sum wxy}{\sum w \sum wx^2 - (\sum wx)^2}$$

$$b = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\sum w \sum wx^2 - (\sum wx)^2}$$

Dado el engorroso carácter de estas ecuaciones, hemos empleado una notación abreviada en la que hemos eliminado el subíndice  $i$  que debe agregarse a cada una de las cantidades. Asimismo, utilizamos el término  $w_i$  para la ponderación de cada par de valores medidos  $(x_i, y_i)$ . Las ponderaciones se calcularán en función de las desviaciones estándar de los valores de  $y$  como

$$w_i = \frac{1}{(S_{y_i})^2}$$

Las mejores estimaciones de las desviaciones estándar de  $m$  y  $b$  pueden expresarse (como se hizo en la sección 6-7) desde el punto de vista de la desviación de los puntos medidos respecto de la mejor línea. Para un ajuste de mínimos cuadrados ponderado, estas desviaciones deberán ponderarse a su vez, y el valor ponderado de  $S_y$  estará dado por:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum w_i \delta_i^2}{n - 2}}$$

Las mejores estimaciones de la desviación estándar de la pendiente y la ordenada al origen, pueden expresarse ahora como:

$$S_m^2 = S_y^2 / W$$

$$S_b^2 = S_y^2 \left( \frac{1}{\sum w} + \frac{\bar{x}^2}{W} \right)$$

donde

$$W = \sum w(x - \bar{x})^2$$

y  $\bar{x}$  es el promedio ponderado de los valores de  $x$ , dado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

Nótese que, como antes, se ha omitido el subíndice  $i$ .

# Apéndice 3

## Tablas de diferencias y cálculo de diferencias finitas

### A3-1 FUNDAMENTOS MATEMATICOS

El cálculo de diferencias finitas proporciona una herramienta poderosa para el tratamiento de las variables medidas. Por el momento, sin embargo, consideremos la situación completamente desde el punto de vista matemático. Una vez que hayamos determinado matemáticamente los valores que necesitamos, podemos proceder a aplicarlos a las mediciones.

Consideremos una función conocida  $y = f(x)$  (véase la figura A3-1), que puede expresarse partiendo de un desarrollo de Taylor alrededor del valor  $x = a$ :

$$f(x) = f(a) + (x - a)\left(\frac{df}{dx}\right)_a + \frac{(x - a)^2}{2!}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_a + \dots$$

Se dice que una función como ésta es analítica en el punto  $x = a$ , y cualquier buen texto de cálculo abundará en mayores detalles al respecto.

Una función tal se define sobre el intervalo continuo de valores en la escala de  $x$ ,  $y$ , para que esta teoría sea aplicable a las variables medidas, debemos transformar la formulación de modo que se refiera a valores discretos de  $x$ . Hagamos que esos valores de  $x$  estén espaciados en forma equidistante, aumentándolas a partir de  $x = a$  a intervalos de longitud  $h$ , de modo que los valores de  $x$  en los que estamos interesados sean:

$$x = a, \quad x = a + h, \quad x = a + 2h, \quad x = a + 3h, \dots$$

Ahora podemos calcular los valores correspondientes de  $y$  para estos valores discretos de  $x$ . Ellos serán:

$$f(a), \quad f(a + h), \quad f(a + 2h), \quad f(a + 3h), \dots$$

y podemos, también, ilustrar estos valores en una gráfica como la que se muestra en la figura A3-2.

Si concentramos nuestra atención en esos valores discretos de  $x$  y  $y$ , y si queremos encontrar una forma del desarrollo de Taylor aplicable a valores discretos, podemos simular las derivadas requeridas utilizando diferencias finitas. Definimos la magnitud  $\Delta f(a)$  como

$$\Delta f(a) = f(a + h) - f(a)$$

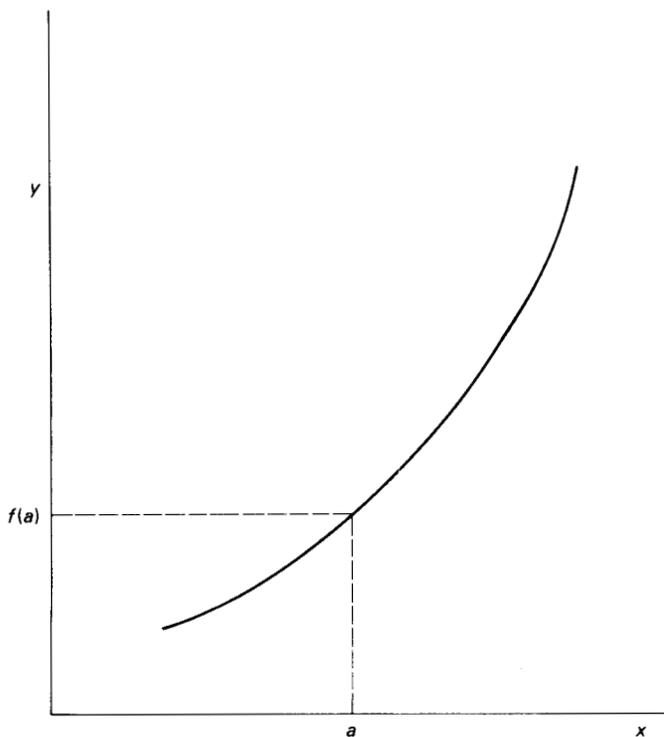


Figura A3-1 Gráfica de la función  $y = f(x)$ .

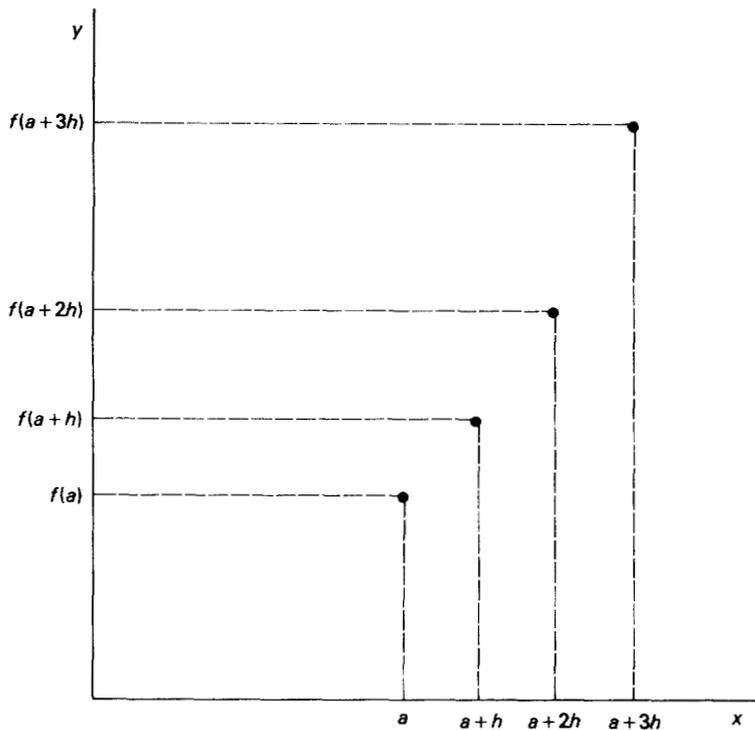


Figura A3-2 Valores de  $f(x)$  para valores de  $x$  cerca de  $x = a$ .

Y en forma correspondiente, tendremos:

$$\Delta f(a + h) = f(a + 2h) - f(a + h)$$

etc., magnitudes que estarán relacionadas con las primeras derivadas de la función en los diferentes valores de  $x$ . De manera semejante, definimos las segundas diferencias como

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a + h) - \Delta f(a)$$

y así sucesivamente para las terceras diferencias y las de orden superior.

Cuando arreglamos todas esas diferencias junto a los valores tabulados de  $f(x)$ , obtenemos una “tabla de diferencias” para esos valores. Una tabla de diferencias para la función:

$$y = 2x + x^3$$

TABLA A3-1 Tabla de diferencias para la función  $y = 2x + x^3$ 

$x$	$y$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$	$\Delta^4$
1	3				
		9			
2	12		12		
		21		6	
3	33		18		0
		39		6	
4	72		24		0
		63		6	
5	135		30		0
		93		6	
6	228		36		0
		129		6	
7	357		42		0
		171		6	
8	528		48		0
		219		6	
9	747		54		
		273			
10	1020				

se muestra en la tabla A3-1. Esta ilustra varias características importantes de las tablas de diferencias, incluyendo, para este caso, la constancia de las terceras diferencias y el consecuente valor cero de las cuartas.

Consideremos ahora el problema de obtener valores de  $y$  para valores de  $x$  intermedios entre los valores discretos de  $x$ . Encontremos, además, la forma de calcular estos valores intermedios a partir de los valores conocidos de  $y$ , en vez de calcularlos directamente a partir de la función misma. La ventaja de tal procedimiento es, por supuesto, que estará disponible para uso posterior en valores de los cuales no conocemos la función correspondiente. Para calcular estos valores intermedios debemos reexpresar el desarrollo de Taylor en forma que sea compatible con las cantidades que se encuentran en las tablas de diferencias, y que sea también adecuado para el cálculo con valores intermedios. En la figura A3-3 la derivada de la función  $f$  en  $x = a$  puede calcularse con la razón  $\Delta/h$ . Los valores correspondientes de la segunda derivada se pueden calcular en función de la segunda diferencia  $\Delta^2$ , y así sucesivamente para las derivadas superiores. Consideremos también un valor de  $x$  intermedio entre  $x = a$  y  $x = a + h$ , y permitamos que éste sea especificado por una nueva variable  $u$  definida por

$$x = a + uh$$

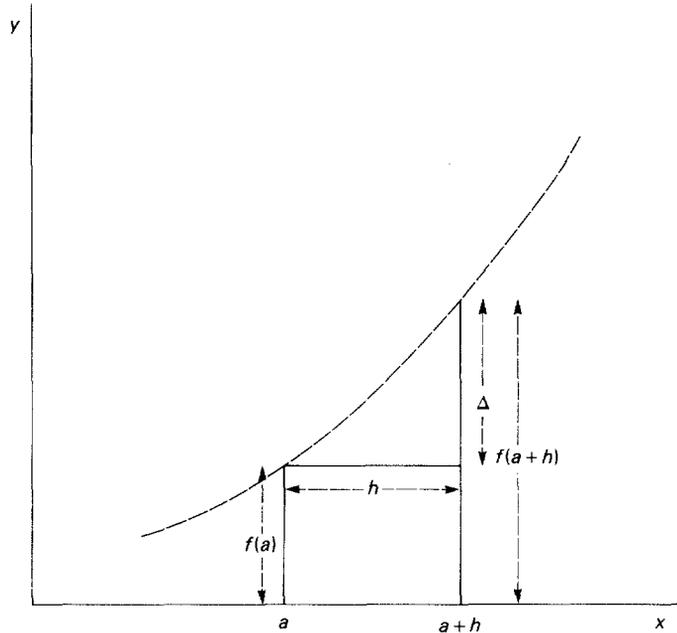


Figura A3-3 Aproximación de la derivada de  $f(x)$  en  $x = a$ .

Ahora podemos reexpresar el desarrollo de Taylor partiendo de las magnitudes anteriormente mencionadas y obtener así los valores intermedios de  $y$  como

$$y = f(a) + u\Delta + \frac{1}{2!}u(u-1)\Delta^2 + \frac{1}{3!}u(u-1)(u-2)\Delta^3 + \dots$$

Esta forma del desarrollo de Taylor se conoce como la fórmula de interpolación de Gregory-Newton. Se puede usar para calcular valores intermedios siempre que tengamos valores tabulados de dos variables. Esos métodos, por ejemplo, se aplicaban comúnmente para interpolar entre los valores tabulados de logaritmos, funciones trigonométricas, etc.

Para aplicar la fórmula de Gregory-Newton, construimos una tabla de diferencias hasta donde esas diferencias se hagan ya sea cero o lo suficientemente pequeñas para que el error incluido en el cálculo de la interpolación sea aceptablemente pequeño. Si construimos la tabla de modo que el valor que estamos buscando quede entre  $x = a$  y  $x = a + h$ , las varias diferencias que necesitamos para incluirlas en la fórmula se encontrarán en la hilera superior de la tabla. Si el valor que buscamos está entre  $x = a + h$  y  $x = a + 2h$ , las dife-

rencias que necesitamos se hallarán en el siguiente renglón hacia abajo, y así sucesivamente.

La extrapolación puede llevarse a cabo mediante un proceso semejante. Supongamos que tenemos un conjunto de valores de  $x$  que van desde  $x = a$  hasta  $x = a + (n - 1)h$ . Si queremos calcular un valor de  $y$  adecuado para  $x = a + nh$ , debemos empezar suponiendo que los valores de  $y$  que se obtienen después de  $x = a + (n - 1)h$  están determinados por la misma función que los valores anteriores. Con base en este supuesto, hay un método sencillo para encontrar  $y$  para  $x = a + nh$ ; éste parte del proceso de ampliar la tabla de diferencias básica. Empezando con la columna de diferencias que son constantes, o aproximadamente constantes para nuestros propósitos, calculamos sucesivamente las diferencias de orden inferior en función de las de orden superior, hasta alcanzar el valor requerido de  $y$  (véase la tabla A3-2). De esta manera la tabla se puede ampliar indefinidamente para proporcionar los valores ulteriores de la función que se requieran.

**TABLA A3-2** Uso de una tabla de diferencias para extrapolación

$x$	$y = x^3$	$\Delta$	$\Delta^2$	$\Delta^3$
2	8			
3	27	19		
4	64	37	18	6
5	125	61	24	6
6	216	91	30	6
7	216 + 127 = 343	91 + 36 = 127	30 + 6 = 36	

También podemos usar una tabla de diferencias para construir un polinomio que o bien reproducirá la verdadera relación funcional entre  $y$  y  $x$ , o al menos proporcionará una aproximación adecuada a ella. Para hacerlo, hay que reexpresar la fórmula de Newton-Gregory en una forma adecuada a nuestro propósito. La habíamos escrito en función de la variable  $u$ ; ahora queremos reexpresarla partiendo de la variable  $x$  al tiempo que seguimos empleando las diferencias  $\Delta$  y no las derivadas  $df/dx$ . Así pues, recordando que

$$x = a + uh$$

tenemos:

$$u = \frac{x - a}{h}$$

y la forma original de la ecuación de Newton-Gregory se convierte en

$$y = f(x) = f(a) + \frac{1}{h}(x - a)\Delta + \frac{1}{2!} \frac{1}{h^2}(x - a)(x - a - 1)\Delta^2 \\ + \frac{1}{3!} \frac{1}{h^3}(x - a)(x - a - 1)(x - a - 2)\Delta^3 + \dots$$

La ecuación está ahora en la forma que deseamos. Si empleamos en ella los valores adecuados de  $\Delta$ ,  $\Delta^2$ ,  $\Delta^3$ , etc. para un valor particular, como  $f(a)$ , generaremos el polinomio requerido en  $x$ .

Como ejemplo, consideremos la tabla de diferencias de la tabla A3-1, y tomemos los valores de la parte superior. Estos son:

$$f(a) = 3, \quad a = 1, \quad h = 1, \quad \Delta = 9, \quad \Delta^2 = 12, \quad \Delta^3 = 6, \quad \Delta^4 = 0$$

Empleando estos valores, y efectuando el cálculo algebraico correspondiente, obtenemos:

$$y = 2x + x^3$$

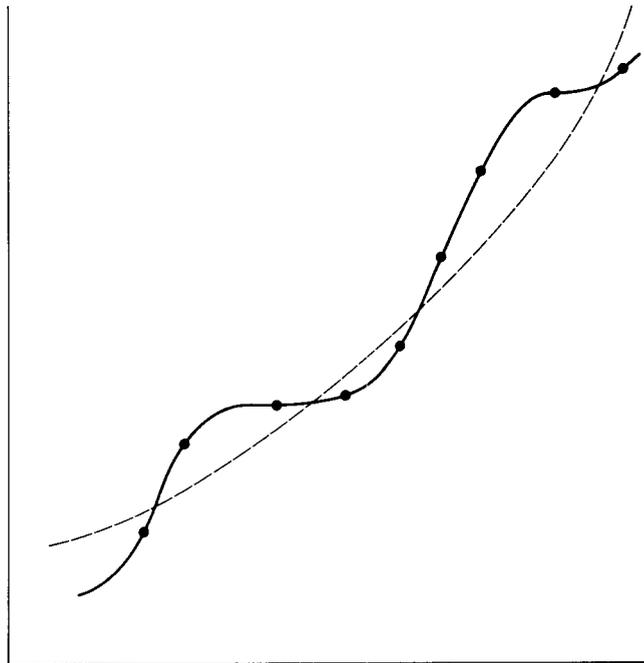
Como ésta es la función con la que empezamos, no debemos sorprendernos. Sin embargo, hemos comprobado lo adecuado de la fórmula de Newton-Gregory para generar un polinomio que sea consistente con un conjunto de valores tabulados. Es, por lo tanto, de inmenso valor potencial para construir un polinomio adecuado cuando nos ocupamos solamente de valores tabulados, y no tenemos idea de una función adecuada que sirva como modelo.

## A3-2 APLICACION DE LAS TABLAS DE DIFERENCIAS A LOS VALORES MEDIDOS

En la sección anterior ilustramos el cálculo de diferencias finitas y tablas de diferencias usando funciones matemáticas. Cuando nos enfocamos a variables medidas y buscamos aplicar estas técnicas, nos encontramos dos divergencias: a) puede ser que no conozcamos una función que proporcione un ajuste adecuado a las observaciones, y b) las variables mostrarán una dispersión proveniente de la incertidumbre de las mediciones.

Consideremos primero el caso en el que las medidas son muy precisas, de modo que la dispersión es insignificante en comparación con los valores medidos. En este caso, la tabla de diferencias contendrá valores que se comportan con relativa regularidad, y podemos usarla para realizar de inmediato procedimientos como la interpolación y la extrapolación. Más aún, si un polinomio de un cierto orden ha de servir como un buen ajuste para las observaciones, las diferencias del orden adecuado resultarán ser casi constantes, y las siguientes diferencias se distribuirán alrededor de cero. Podremos emplear, entonces, los procedimientos de la sección anterior para construir el polinomio adecuado.

Si, por otra parte, nuestras observaciones muestran una dispersión mayor, nos enfrentamos con un problema de interpretación en cierto modo diferente. En principio es posible ajustar exactamente un polinomio a *cualquier* conjunto de valores, no importa qué tanta dispersión muestren. De hecho, a cualquier conjunto de valores es posible ajustarle un número infinito de polinomios, de los cuales se ilustran sólo dos en la figura A3-4. Así pues, ¿cuál polinomio queremos? ¿Va a ser uno como el que representa la línea continua de la figura A3-4? Bajo ciertas circunstancias, esto quizá sea apropiado. Sin embargo, en otras ocasiones tendremos una buena razón para pensar que, aparte de



**Figura A3-4** Ajuste de un polinomio a un conjunto de observaciones dado.

la incertidumbre de las mediciones, el comportamiento básico del sistema es regular, y en realidad la que necesitamos es la función que corresponde a la línea punteada en la figura A3-4. De este modo, tendremos que ocuparnos de la “suavización” de las observaciones, con lo que queremos decir, escoger una curva que siga a las observaciones en términos generales, pero que pasa por alto aquellas desviaciones menores de un límite preseleccionado. Muchos de los textos clásicos de teoría de mediciones proporcionan detalladas descripciones de los procedimientos de suavización. Véase, por ejemplo, el texto de Whittaker y Robinson que aparece en la Bibliografía.

No siempre resulta claro hasta dónde tenemos que llegar en la “suavización” de observaciones. Sacrificamos la sencillez de representación para evitar una posible pérdida de conocimiento detallado genuino en el comportamiento del sistema. Esto requiere buen juicio de parte del experimentador, y nuestras decisiones no siempre son acogidas con la aprobación general. En todo caso, si es que queremos hacer la elección de un cierto orden de polinomio para representar las observaciones, podemos escoger en la tabla la columna de diferencias correspondiente que deba ser constante, y con base en algún valor promedio de esas diferencias, construir el polinomio deseado.

Si tal procedimiento no es de nuestro agrado, y estamos restringidos a observaciones inevitablemente fluctuantes, nuestra única alternativa acaso sea emplear un procedimiento de mínimos cuadrados y minimizar con ello la discrepancia entre las observaciones y una función del tipo seleccionado. Nótese, empero, la importante diferencia entre el uso de la tabla de diferencias y del procedimiento de mínimos cuadrados. La tabla de diferencias nos indicará los coeficientes de un polinomio implícito en las observaciones; el procedimiento de mínimos cuadrados, en cambio, nos dará simplemente los parámetros optimizados de una función cuya forma general debemos elegir por cuenta propia.

# Apéndice 4

## Experimento de muestra

### A4—1 DISEÑO DEL EXPERIMENTO

#### Sistema

Nos dan un resorte suspendido de un soporte, un platillo agregado al extremo inferior del resorte para colocar pesos, un juego de pesas, y un cronómetro con la escala dividida en  $\frac{1}{5}$  de segundo.

#### Modelo

Se nos dice que, suponiendo que el alargamiento de un resorte sea proporcional a la carga aplicada, el periodo de oscilación,  $T$ , para la carga suspendida,  $m$ , está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

en donde  $k$  es la constante de un resorte particular.

#### Requerimiento

Se nos pide que midamos la  $k$  de nuestro resorte con una incertidumbre no mayor del 10%.

## Diseño del experimento

Siguiendo los pasos indicados en la sección 5-3, tenemos:

a) Nuestro sistema en operación consiste en el resorte solo. No nos han dado información sobre el peso del platillo para las pesas, o de alguna manera de pesarlo, de modo que debemos proseguir sin ese conocimiento.

b) Nuestro modelo contiene sólo dos variables, carga  $m$  y periodo de oscilación  $T$ , así que es fácil decidir que nuestra variable de entrada, la que podemos controlar, será  $m$  y la variable de salida será  $T$ .

c) Para presentar la ecuación en forma en que la gráfica sea una línea recta, nuestra primera idea podría ser eliminar la raíz cuadrada. Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, nos queda:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k}$$

La comparación con la ecuación de una línea recta

$$\text{variable vertical} = \text{pendiente} \times \text{variable horizontal}$$

sugiere que debemos tomar

$$\text{variable vertical} = T^2$$

$$\text{variable horizontal} = m$$

$$\text{pendiente} = \frac{4\pi^2}{k}$$

Esta es una elección aceptable, pero una incógnita,  $k$ , aparece en el denominador de la pendiente. Para simplificar la aritmética futura es igualmente válido, y más conveniente, escribir la ecuación como

$$m = \frac{k}{4\pi^2} T^2$$

en donde

$$\text{variable vertical} = m$$

$$\text{variable horizontal} = T^2$$

$$\text{pendiente} = \frac{k}{4\pi^2}$$

d) En este caso el alcance de la variable de entrada,  $m$ , puede estar gobernado por las pesas que nos proporcionaron. Sin embargo, además de eso, debemos considerar la posibilidad de sobrecargar el resorte. ¿Se sugiere, o está

escrito en algún lado, que se deben restringir las cargas? Podríamos ensayar unos cuantos pesos en el platillo para ver cómo se comporta el resorte. De un modo o de otro podemos escoger un alcance de  $m$  con el que nos sintamos cómodos. El alcance de los valores de  $T$  no representa problema alguno, ya que lo determina el sistema.

e) Vamos a suponer que nuestras pesas son suficientemente exactas para que no necesitemos considerar su incertidumbre. Por supuesto, no son totalmente exactas, y si queremos saber qué incertidumbre tienen, debemos consultar el catálogo del proveedor.

Por lo tanto, la única incertidumbre surgirá de las mediciones de tiempo, y esa incertidumbre dependerá de la precisión con que seamos capaces de determinar el tiempo de las oscilaciones. La única manera de averiguarlo es hacer la prueba. Escogemos una carga típica, iniciamos las oscilaciones, y medimos el intervalo de tiempo de, digamos, 10 oscilaciones. Ahora debemos decidir qué es lo que determina la incertidumbre de las medidas. ¿Es la exactitud de la lectura del cronómetro, o es nuestra capacidad de observar las oscilaciones, y arrancar y parar el reloj apropiadamente? Es obvio que debemos probar intentando hacer la medición de nuevo, y debemos continuar probando el sistema de medición en esta forma hasta que estemos seguros de que conocemos nuestras capacidades. Podemos decidir, como en el caso presente, que estamos seguros de que podemos medir los intervalos de tiempo con una incertidumbre de  $\pm .3$  segundos.

Sin embargo, con eso no se completa nuestra consideración de la precisión; debemos evaluar el efecto en los valores de  $k$  de esta incertidumbre en  $T$ . Es difícil planear de antemano con mucho detalle, porque nuestro valor final de  $k$  lo obtendremos de la gráfica, pero es prudente verificar que nuestras lecturas individuales tengan la precisión adecuada para contribuir en forma significativa al resultado final.

Por ejemplo, supongamos que medimos el tiempo de un cierto número de oscilaciones que dieron un intervalo de tiempo,  $t$ , de 2 seg. ¿Cuál sería la contribución de nuestro  $\pm .3$  seg a la incertidumbre de  $k$ ?  $k$  es una función de  $t^2$ . Por lo tanto

$$RU(k) = \frac{\delta k}{k} = 2 \times \frac{.3}{2} = 30\%$$

Es claro que una medición como ésta hará una contribución poco significativa a la determinación de  $k$  con el 10% de precisión. Si queremos una precisión del

10% en  $k$ , necesitamos un 5% de precisión en  $t$ , y podemos determinar en consecuencia los límites en la medición de  $t$  argumentando como sigue:

Si

$RU(t)$  no debe ser mayor del 5%

esto es

$$\frac{0.3}{t} \nlessgtr .05$$

entonces

$$t \nlessgtr \frac{0.3}{0.05} = 6 \text{ seg}$$

Así que, cualquiera que sea el valor actual de  $T$ , si medimos un número de oscilaciones que dé un intervalo de tiempo total de 6 seg o más, lo más probable es que la incertidumbre en nuestras medidas de tiempo sea aceptable. Por conveniencia podemos escoger un número constante de oscilaciones para las diferentes cargas, pero, si tuviéramos poco tiempo para un experimento largo, podríamos escoger para cada carga un número de oscilaciones que nos dé un valor satisfactorio de  $t$ .

f) Vamos a decidir, como primera suposición, que mediremos el tiempo de 10 oscilaciones, sabiendo que incluso para la carga más pequeña eso nos da un intervalo de tiempo medido mayor de 6 seg, y que tomaremos el tiempo de las oscilaciones para cargas de .1, .15, .2, .25, .3, .35, .4, .45 y .5 kg. Como queremos graficar  $m$  vs.  $T^2$  e incorporar el valor de la incertidumbre absoluta en  $T^2$ , esto es,  $2T \times \delta T$  o  $2T \times AU(T)$ , construiremos la tabla que expresa nuestro programa de medición para que tenga los siguientes encabezados:

Carga, $m$ , kg	Número de oscilaciones	Tiempo, $t$ , seg	Periodo, $T$ , seg	Periodo <sup>2</sup> $T^2$ , seg <sup>2</sup>	$AU(T^2)$ seg <sup>2</sup>

### Resultados experimentales

El siguiente paso es hacer realmente las mediciones y llenar la tabla con los valores medidos de  $t$  y los valores calculados para el periodo y el periodo al cuadrado con sus incertidumbres absolutas. El resultado de este proceso se verá entonces como en la tabla siguiente.

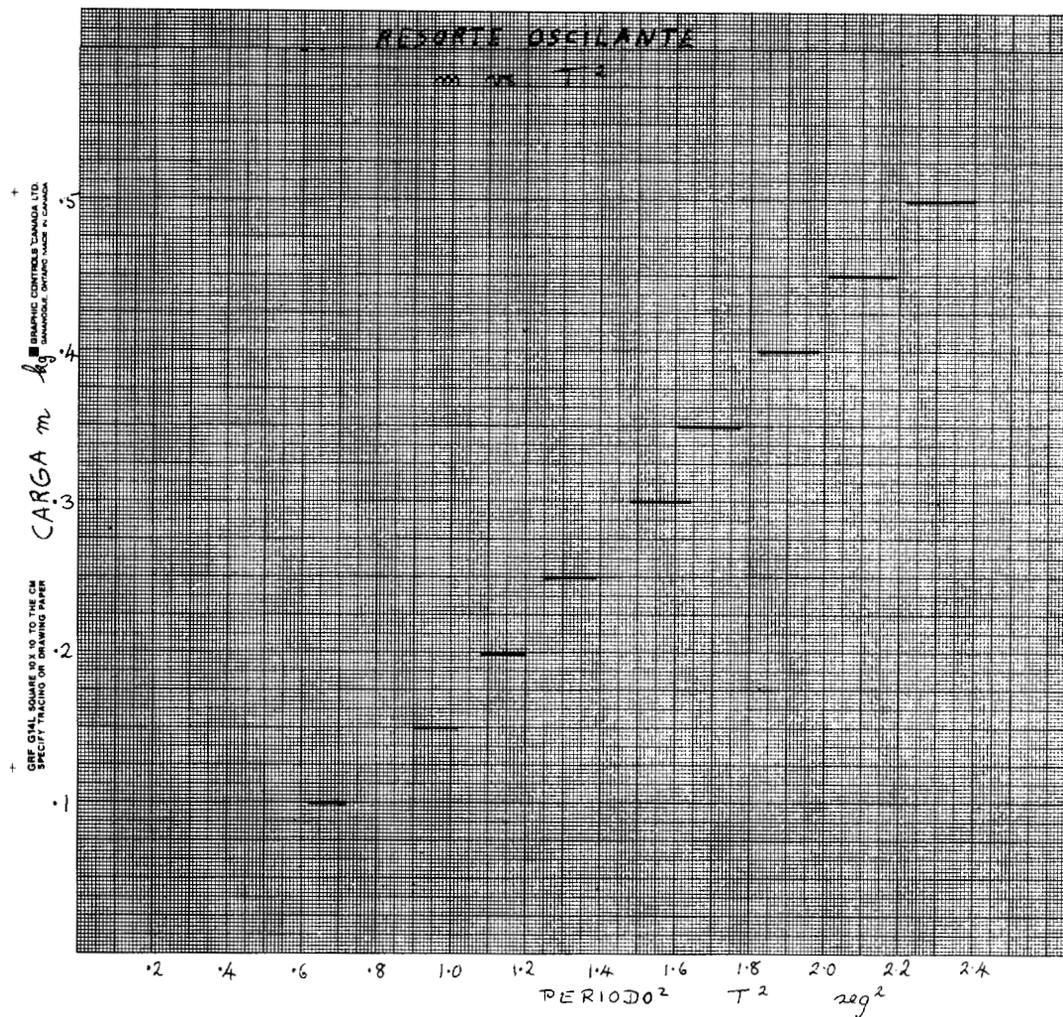
Carga, $M$ , kg	Número de oscilaciones	Tiempo, $t$ , seg	Periodo, $T$ , seg	Periodo <sup>2</sup> , $T^2$ , seg <sup>2</sup>	$AU(T^2)$ , seg <sup>2</sup>
0.10	10	$8.2 \pm 0.3$	$0.82 \pm 0.03$	0.67	$\pm 0.05$
0.15	10	$9.8 \pm 0.3$	$0.98 \pm 0.03$	0.96	0.06
0.20	10	$10.7 \pm 0.3$	$1.07 \pm 0.03$	1.14	0.06
0.25	10	$11.5 \pm 0.3$	$1.15 \pm 0.03$	1.32	0.07
0.30	10	$12.5 \pm 0.3$	$1.25 \pm 0.03$	1.56	0.08
0.35	10	$13.0 \pm 0.3$	$1.30 \pm 0.03$	1.69	0.08
0.40	10	$13.8 \pm 0.3$	$1.38 \pm 0.03$	1.90	0.08
0.45	10	$14.5 \pm 0.3$	$1.45 \pm 0.03$	2.10	0.09
0.50	10	$15.2 \pm 0.3$	$1.52 \pm 0.03$	2.31	0.09

Ahora debemos graficar estos valores de  $m$  y  $T^2$ . Cada valor graficado debe contener su intervalo de incertidumbre;  $m$  no tiene incertidumbre y  $T^2$  es incierta en la cantidad indicada en la última columna, de modo que cada “punto” de la gráfica será una línea horizontal corta.

Una vez que se grafiquen esos valores, la gráfica se parecerá a la que muestra la figura A4-1. El siguiente paso es interpretar lo que vemos en términos de las categorías descritas en la sección 6-4. Primero observamos la dispersión de los puntos y consideramos si es consistente con nuestra estimación previa de la incertidumbre. En el caso presente parece haber una consistencia razonable entre la dispersión y la incertidumbre estimada, y no parece requerirse en esta etapa ninguna consideración posterior. El siguiente punto a considerar es hasta dónde el comportamiento del sistema es consistente con el modelo. En el caso actual el modelo predecía una línea recta que pasara por el origen, y debemos juzgar nuestra gráfica contra tal caso. Podemos ver de inmediato que en nuestro caso la correspondencia con el comportamiento de una línea recta parece bastante adecuado en todo el intervalo. Por lo tanto, estaremos justificados para incluir todos los puntos cuando lleguemos a decidir sobre nuestra elección de líneas rectas.

Sin embargo, en lo que respecta a la coordenada al origen, la situación es diferente. Una ojeada a la gráfica dejará en claro que vamos a tener una abscisa al origen sobre el eje de  $T^2$  que no podemos atribuir a la incertidumbre de las medidas. Tendremos que volver a considerar esta discrepancia más tarde, pero mientras tanto podemos notar que el valor final de  $k$  se obtendrá sólo de la pendiente, y que la pendiente se puede calcular aun en presencia de una coordenada al origen inesperada.

El siguiente paso es trazar rectas para que podamos obtener valores para las pendientes. Una elección sería dibujar nuestra “mejor” recta a ojo, y tam-



**Figura A4-1** Primera etapa de la gráfica de  $m$  vs.  $T^2$ .

bién rectas que correspondan a las pendientes máxima y mínima permitidas por el intervalo de incertidumbre en la dispersión. En esta etapa, la gráfica se parecerá a la que aparece en la figura A4-2.

Ahora tenemos que leer valores de la gráfica que nos permitan calcular estas pendientes. Para cada línea buscamos intersecciones convenientes con el papel cuadrulado, como se ilustra en la figura A4-3, que nos darán las coordenadas de puntos en la parte superior e inferior de cada recta. En la gráfica

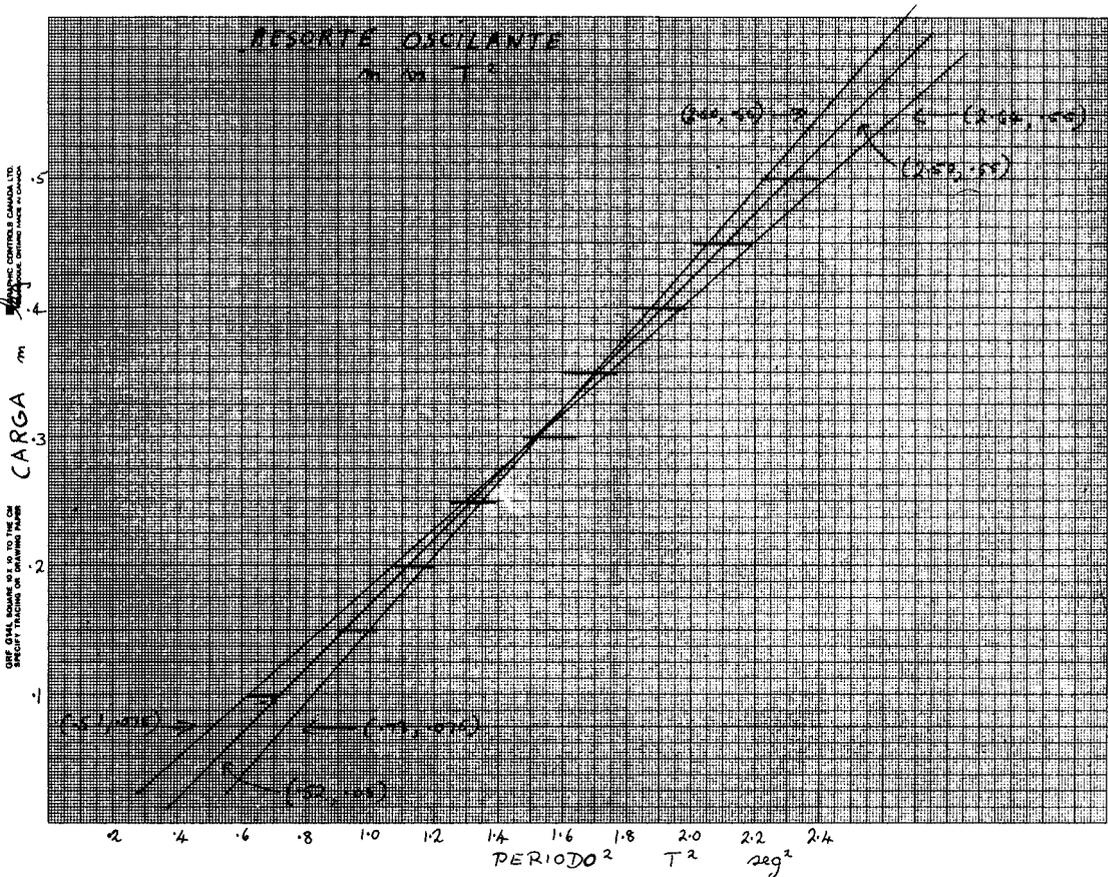


Figura A4-2 Forma final de la gráfica de  $m$  vs.  $T^2$ .

las intersecciones elegidas se indican con flechas, y se rotulan las coordenadas adecuadas. Dadas estas coordenadas, es fácil calcular las pendientes:

Línea más inclinada:

$$\begin{aligned} \text{pendiente} &= \frac{0.55 - 0.075}{2.40 - 0.73} \\ &= 0.284 \text{ kg seg}^{-2} \end{aligned}$$

Línea central:

$$\begin{aligned} \text{pendiente} &= \frac{0.55 - 0.05}{2.50 - 0.52} \\ &= 0.253 \text{ kg seg}^{-2} \end{aligned}$$

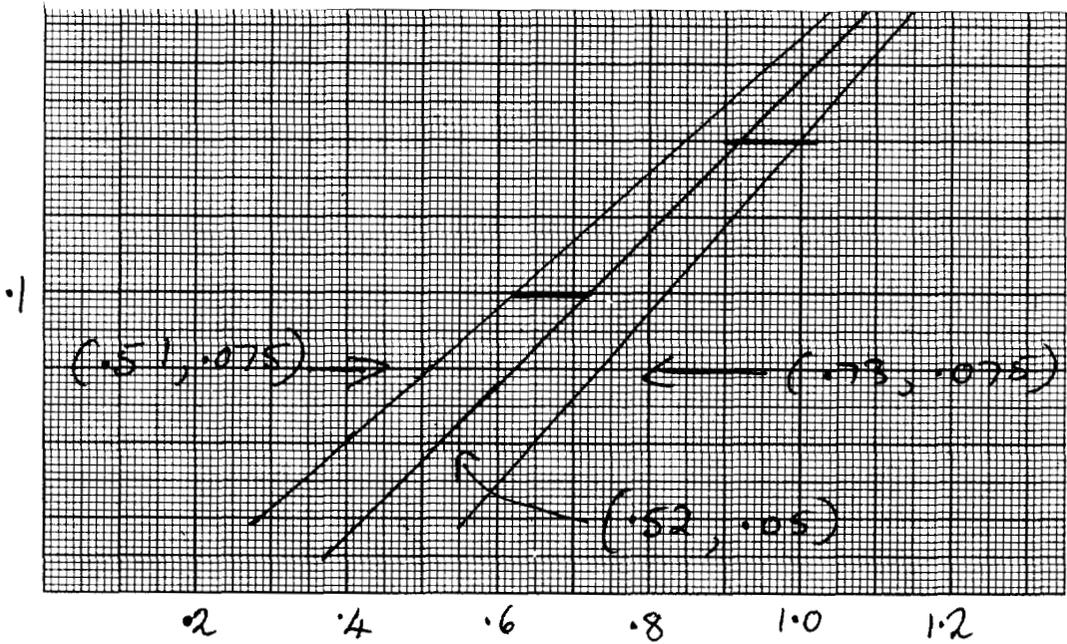
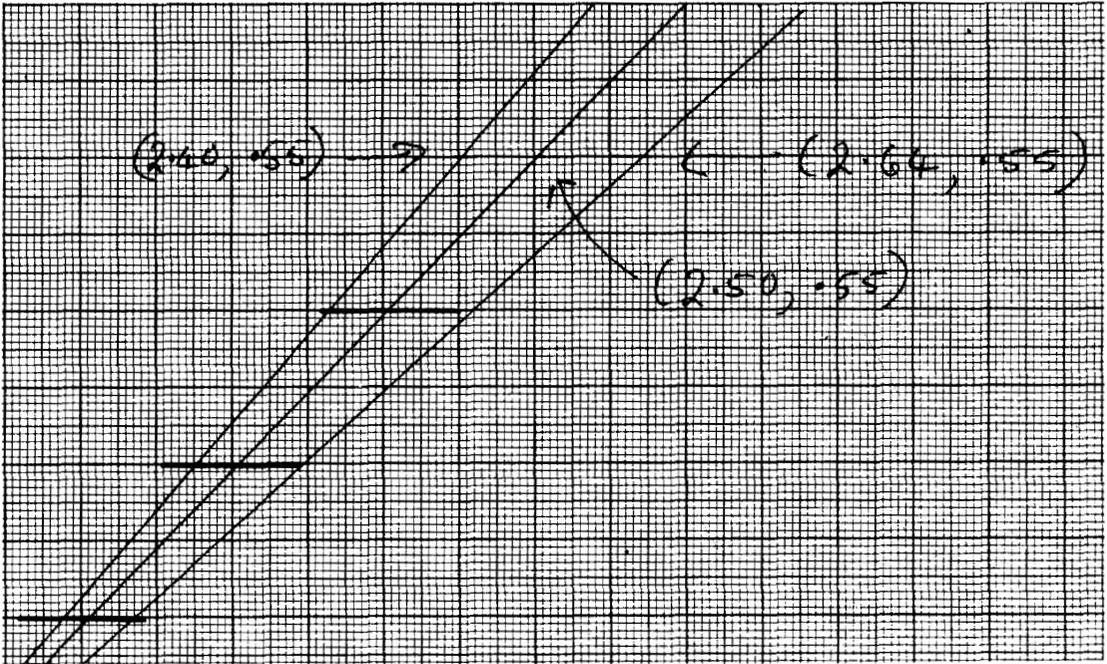


Figura A4-3 Identificación de las intersecciones en la parte superior e inferior de la gráfica, que permiten calcular las pendientes.

Línea menos inclinada:

$$\begin{aligned} \text{pendiente} &= \frac{0.55 - 0.075}{2.64 - 0.51} \\ &= 0.223 \text{ kg seg}^{-2} \end{aligned}$$

Ahora se pueden calcular los valores correspondientes de  $k$ , usando

$$\text{pendiente} = \frac{k}{4\pi^2}$$

lo que da

$$k = 4\pi^2 \times \text{pendiente}$$

Valor máximo:

$$k = 11.212 \text{ kg seg}^{-2}$$

Valor medio:

$$k = 9.988 \text{ kg seg}^{-2}$$

Valor mínimo:

$$k = 8.804 \text{ kg seg}^{-2}$$

Ahora que tenemos una medida de la incertidumbre total de los valores de  $k$ , podemos redondear los valores para obtener nuestra afirmación final sobre  $k$  y su incertidumbre:

$$k = 10.0 \pm 1.2 \text{ kg seg}^{-2}$$

La cifra final de la incertidumbre, del 12% del valor de  $k$ , es ligeramente mayor que nuestra meta del 10%, pero la diferencia tal vez no sea muy grande para aceptar que nos hemos acercado lo suficiente a nuestro objetivo. Si nos vemos forzados a aceptar cualquier nueva reconsideración, podemos volver al principio y reevaluar nuestra incertidumbre básica en las medidas de tiempo. Es cierto que la baja dispersión de los puntos en comparación con la incertidumbre estimada en la parte superior de la gráfica sugiere que fuimos ligeramente pesimistas con nuestra estimación de  $\pm .3$  seg en el tiempo, y una reevaluación nos puede permitir refinar esa estimación.

Hemos completado nuestros cálculos de  $k$ ; ahora tenemos que regresar al problema de la coordenada al origen inesperada. Quedamos convencidos de

que era inofensiva, ya que nuestro valor de  $k$  se obtenía de la pendiente, que se podía determinar perfectamente, aun en presencia de la abscisa al origen o intercepto. Sin embargo, no debemos ignorarla totalmente, ya que constituye una falta de correspondencia entre el modelo y el sistema, y no es una buena práctica experimental dejar cosas como ésa sin atender. Tratando de encontrar posibles fuentes de discrepancia, podemos notar que parece estar asociada con alguna carga que no se tomó en cuenta en nuestros valores de  $m$ . Porque cuando la carga agregada,  $m$ , es cero, la gráfica nos dice que todavía observaremos un periodo finito de oscilación. ¿Qué podría dar lugar a esa masa no considerada? Una suposición obvia sería el platillo en el que se pusieron las pesas. Otra hipótesis obvia sería la masa del resorte mismo. Sin ninguna investigación posterior, no podemos estar seguros de que cada una de estas hipótesis sea buena, pero nuestra explicación de la abscisa al origen inesperada, parece suficientemente razonable para que probablemente estemos justificados para terminar el experimento presente en este punto, y dejar la confirmación de nuestras suposiciones a experimentos posteriores.

## A4—2 INFORME

En esta sección daremos una versión de un informe final que se podría escribir con base en el experimento cuya conducción se describió en la sección anterior. Se puede escribir el informe de acuerdo con las sugerencias que se dieron en el capítulo 7. Sólo se da la versión final del informe; el detalle de la construcción y su correspondencia con las sugerencias del capítulo 7 se puede elucidar comparando el informe con las diversas secciones del capítulo 7.

### MEDICION DE LA CONSTANTE DE UN RESORTE POR EL METODO DE OSCILACION

#### Introducción

Se puede medir la rigidez de un resorte tomando el tiempo de oscilación de una carga suspendida. Para un resorte elástico (alargamiento  $\propto$  carga), se puede probar que el periodo de oscilación  $T$  de una masa suspendida  $m$ , está dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1)$$

en donde  $k$  es la constante de ese resorte en particular. El objetivo del presente experimento es medir el valor de  $k$  de un resorte con una incertidumbre no mayor del 10%.

Se puede reescribir la ecuación (1) para que quede

$$m = \frac{k}{4\pi^2} T^2$$

la que es lineal en  $m$  y  $T^2$ , con pendiente  $k/4\pi^2$ . Así, midiendo la variación del periodo de oscilación al variar la carga, podremos trazar una gráfica de  $m$  vs.  $T^2$  y obtener el valor de  $k$  a partir de la pendiente.

### Procedimiento

Usando el aparato que se muestra en la figura 1, medimos la variación del periodo de oscilación con la carga. Las cargas consistieron en un juego de pesas graduadas "Cenco" desde .1 kg hasta .5 kg, con una precisión especificada de .04%.

El periodo de oscilación se midió tomando el tiempo de varias oscilaciones, usando un cronómetro graduado en  $\frac{1}{5}$  de segundo.

### Resultados

Los valores medidos de la carga y del periodo de oscilación se muestran en la tabla 1.

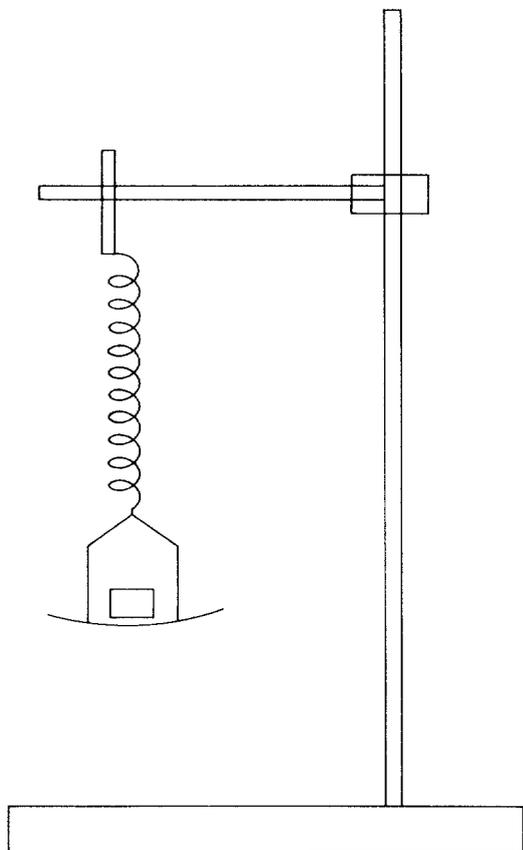
La incertidumbre que se muestra para los tiempos medidos, se apreció visualmente estimando los límites extremos de valores posibles del tiempo, y así mismo los valores calculados para la incertidumbre de  $T^2$  también representan los límites extremos posibles.

La gráfica de los valores de  $m$  y  $T^2$  se muestra en la figura 2. El valor de  $k$  y su incertidumbre fueron calculados a partir de la pendiente de las tres líneas ilustradas, lo que da

$$k = 10.0 \pm 1.2 \text{ kg seg}^{-2}$$

### Discusión

Usando el método de oscilación, se ha determinado que el valor de la constante de rigidez de un resorte es de  $10 \pm 1.2 \text{ kg seg}^{-2}$ . El modelo que representa la ecuación (1) predice, para la gráfica de  $m$ ,  $T^2$ , una línea recta que pasa por el origen. En nuestro experimento, la variación de  $m$  con  $T^2$  demostró ser consistente con una línea recta dentro de los límites presentes de incertidumbre. Sin embargo, en vez de pasar por el origen, se puede ver que las líneas que se mues-



**Figura 1** Diagrama del resorte, el soporte y la carga.

**TABLA 1** Variación del periodo de oscilación con carga

Carga, $M$ , kg	Número de oscilaciones	Tiempo, $t$ , seg	Periodo, $T$ , seg	Periodo <sup>2</sup> , $T^2$ , seg <sup>2</sup>
0.1	10	$8.2 \pm 0.3$	$0.82 \pm 0.03$	$0.67 \pm 0.05$
0.15	10	$9.8 \pm 0.3$	$0.98 \pm 0.03$	$0.96 \pm 0.06$
0.20	10	$10.7 \pm 0.3$	$1.07 \pm 0.03$	$1.14 \pm 0.06$
0.25	10	$11.5 \pm 0.3$	$1.15 \pm 0.03$	$1.32 \pm 0.07$
0.30	10	$12.5 \pm 0.3$	$1.25 \pm 0.03$	$1.56 \pm 0.08$
0.35	10	$13.0 \pm 0.3$	$1.30 \pm 0.03$	$1.69 \pm 0.08$
0.40	10	$13.8 \pm 0.3$	$1.38 \pm 0.03$	$1.90 \pm 0.08$
0.45	10	$14.5 \pm 0.3$	$1.45 \pm 0.03$	$2.10 \pm 0.09$
0.50	10	$15.2 \pm 0.3$	$1.52 \pm 0.03$	$2.31 \pm 0.09$

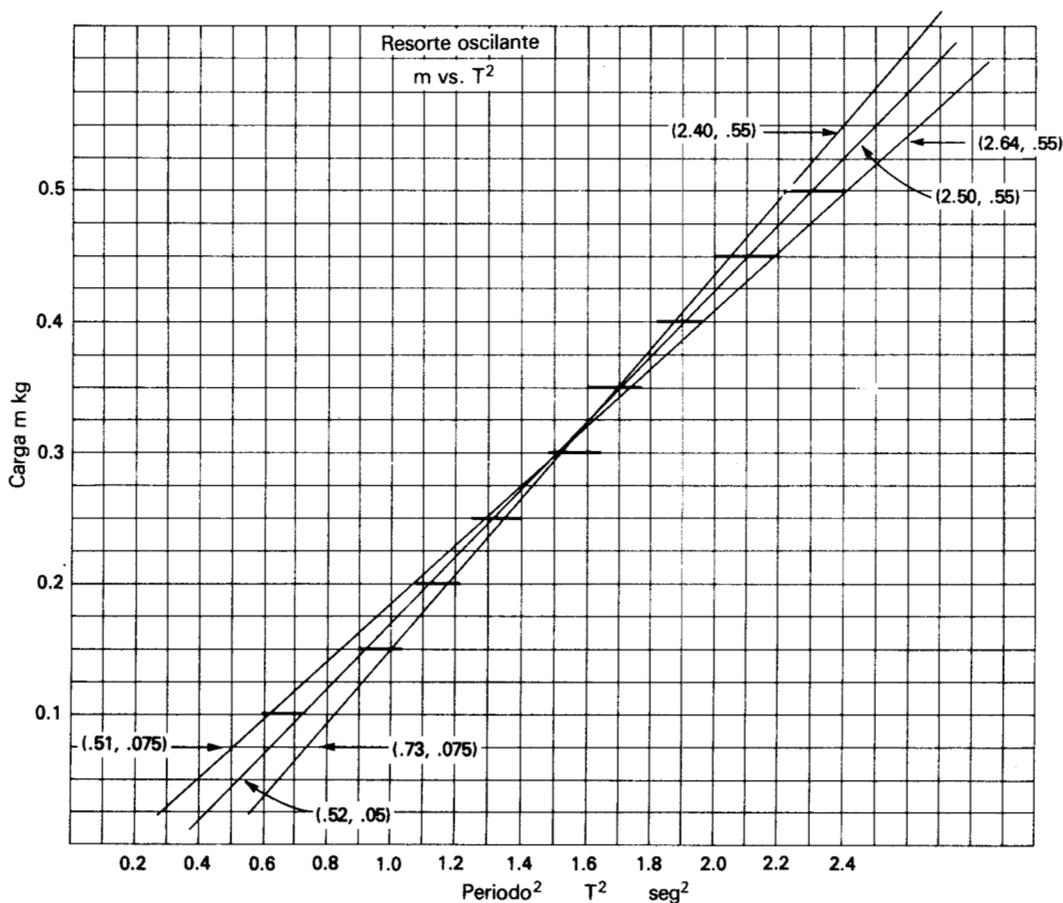


Figura 2 Gráfica de  $m$  vs.  $T^2$ .

tran en la figura 2 parecen tener una abscisa al origen o intercepto finito en el eje de  $T^2$ , que no se puede atribuir a la incertidumbre de la medición. No obstante, nuestro valor de  $k$  se obtuvo a partir de la pendiente únicamente, y debe de estar libre de errores que provengan de factores que generen un intercepto.

Ya que el intercepto da un valor finito para  $T$  a  $m = 0$ , esto parece estar asociado con la presencia de alguna carga no incluida en los valores medidos de  $m$ . Podemos sugerir que una carga extra como ésa puede provenir del platillo que soporta las pesas, y de la masa del resorte mismo, aunque no hemos comprobado estas posibilidades.

# Bibliografía

El tema de la experimentación es vasto, y en correspondencia, la literatura sobre él es muy extensa y diversa. Para cubrir totalmente nuestras variadas necesidades no hay un sustituto más satisfactorio que ir a la biblioteca y familiarizarse con la amplitud de sus ofertas. La siguiente lista contiene algunos libros recientes y algunas obras clásicas, pero dista mucho de ser exhaustiva. Sólo se pretende que proporcione unas cuantas sugerencias que puedan servir como punto de partida para el estudio individual.

- BACON, R. H. "The 'Best' Straight Line among the Points," *American Journal of Physics*, **21**, 428 (1953).
- BARFORD, N. C. *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth*. Addison-Wesley, 1967.
- BARRY, R. A. *Errors in Practical Measurement in Science, Engineering and Technology*. Wiley, 1978.
- BEERS, Y. *Introduction to the Theory of Error*. Addison-Wesley, 1957.
- BEVINGTON, P. R. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. McGraw-Hill, 1969.
- BRADDICK, H. J. J. *The Physics of the Experimental Method*. Chapman and Hall, 1956.
- BRAGG, G. M. *Principles of Experimentation and Measurement*. Prentice-Hall, 1974.
- BRINKWORTH, B. J. *An Introduction to Experimentation*. The English University Press, 1973.
- COHEN, I. B. *Revolution in Science*. Harvard University Press, 1985.
- COOK, N. H., RABINOWICZ, E. *Physical Measurement and Analysis*. Addison-Wesley, 1963.

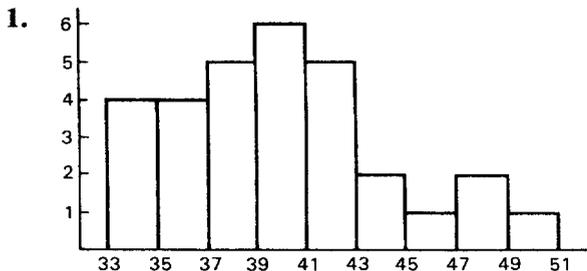
- COX, D. R. *Planning of Experiments*. Wiley, 1958.
- DEMING, W. E. *Statistical Adjustment of Data*. Wiley, 1944.
- DRAPER, N. R., SMITH, H. *Applied Regression Analysis*. Wiley, 1981.
- FRETTER, W. B. *Introduction to Experimental Physics*. Prentice-Hall, 1954.
- FREUND, J. E. *Modern Elementary Statistics*. Prentice-Hall, 1961.
- HALL, C. W. *Errors in Experimentation*. Matrix Publishers, 1977.
- HARRÉ, R. *Great Scientific Experiments*. Oxford University Press, 1983.
- HORNBECK, R. W. *Numerical Methods*. Quantum Publishers, 1975.
- JEFFREYS, H. *Scientific Inference*. Cambridge University Press, 1957.
- KUHN, T. S. *The Structure of Scientific Revolutions*. University of Chicago Press, 1970.
- LEAVER, R. H., THOMAS, T. R. *Analysis and Presentation of Experimental Results*. Macmillan, 1974.
- LINDLEY, D. V., MILLER, J. C. P. *Cambridge Elementary Statistical Tables*. Cambridge University Press, 1958.
- MARGENAU, H., MURPHY, G. M. *The Mathematics of Physics and Chemistry*. Van Nostrand, 1947.
- MENZEL, D. H., JONES, H. M., BOYD, L. G. *Writing a Technical Paper*. McGraw-Hill, 1961.
- PARRATT, L. G. *Probability and Experimental Errors in Science*. Wiley, 1961.
- RABINOWICZ, E. *An Introduction to Experimentation*. Addison-Wesley, 1970.
- ROSSINI, F. D. *Fundamental Measures and Constants for Science and Technology*. CRC Press, 1974.
- SCHENCK, H. *Theories of Engineering Experimentation*. McGraw-Hill, 1961.
- SHAMOS, M. H. (editor). *Great Experiments in Physics*. Holt-Dryden, 1960.
- SHCHIGOLEV, B. M. *Mathematical Analysis of Observations*. American Elsevier, 1965.
- SQUIRES, G. L. *Practical Physics*. McGraw-Hill, 1968.
- STANTON, R. G. *Numerical Methods for Science and Engineering*. Prentice-Hall, 1961.
- STRONG, J. *Procedures in Experimental Physics*. Prentice-Hall, 1938.
- STRUNK, W., WHITE, E. B. *The Elements of Style*. Macmillan, 1979.
- TAYLOR, J. R. *An Introduction to Error Analysis*. University Science Books, 1982.
- TOPPING, J. *Errors of Observation and their Treatment*. The Institute of Physics, London, 1955.
- TUTTLE, L., SATTERLEY, J. *The Theory of Measurements*. Longmans Green, 1925.
- WHITTAKER, E. T., ROBINSON, G. *The Calculus of Observations*. Blackie, 1944.
- WILSON, E. B. *An Introduction to Scientific Research*. McGraw-Hill, 1952.
- WORTHING, A. G., GEFFNER, J. *Treatment of Experimental Data*. Wiley, 1946.

# Respuestas a los problemas

## CAPITULO 2:

1.  $142.45 \pm 0.15$  cm; 0.11%
2.  $1.245 \pm 0.005$  A,  
 $3.3 \pm 0.1$ V; 0.4%, 3.0%
3. 0.5 min
4. a) 10 cm, b) 2 cm
5. 7.7%
6. 0.6%
7.  $26$  cm<sup>2</sup>
8. 0.30 ohm
9.  $9.77 \pm 0.04$  m seg<sup>-2</sup>, 0.4%
10.  $1800$  kg m<sup>-3</sup>
11. 0.110 m, 0.0012 m, 1.08%
12. 0.8 nm, 0.24%
13.  $14.3 \pm 0.1$ ;  $14.25 \pm 0.15$
14.  $6.75 \pm 0.03$

## CAPITULO 3:



2. Entre 39 y 41, 38.
3. 38.3
4. 4.39
5. 0.80
6. 0.58
7. a) 33.9 a 42.7,  
b) 29.5 a 47.1
8. a) 37.5 a 39.1,  
b) 36.7 a 39.9
9. a) 3.8 a 5.0, b) 3.2 a 5.5
10. 0.16
11. Rechazarla
12. La muestra 34, 47, 43, 40, 32 tiene media 39.2 y desviación estándar 5.56  
La muestra 36, 40, 38, 43, 34 tiene media 38.2 y desviación estándar 3.12
13. Más de 130
14. Más de 200
15.  $0.047 \text{ mm}^2$
16.  $0.21 \times 10^{-9} \text{ m}$
17.  $0.11 \text{ m seg}^{-2}$

CAPITULO 5:

1. No
2. alcance  $\propto \left(\frac{\text{velocidad}}{g}\right)^2$
3. presión  $\propto \frac{\text{tensión superficial}}{\text{radio}}$
4. periodo  $\propto \sqrt{\frac{\text{momento de inercia}}{\text{constante de rigidez}}}$
5. deflexión  $\propto \left(\frac{\text{fuerza de carga}}{y \times \text{radio}^2}\right)^a$   
 $\times \left(\frac{\text{longitud}}{\text{radio}}\right)^b$  radio, en donde  
 $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias
6.  $s$  vertical,  $t^2$  horizontal; la pendiente es  $\frac{1}{2} a$
7.  $T$  vertical,  $n^2 t^2$  horizontal; la pendiente es 4 m
8.  $P$  vertical,  $v^2$  horizontal; la pendiente es  $\rho/2$
9.  $T^2$  vertical,  $\cos \alpha$  horizontal; la pendiente es  $4\pi^2 l/g$
10.  $d$  vertical,  $Wl^3$  horizontal; la pendiente es  $4/Yab^3$
11.  $h$  vertical,  $1/R$  horizontal; la pendiente es  $2\sigma/\rho g$
12.  $p$  vertical,  $T$  horizontal; la pendiente es  $R/v$
13.  $fv_0$  vertical,  $f - f_0$  horizontal; la pendiente es  $v$
14.  $l$  vertical,  $\Delta t$  horizontal; la pendiente es  $l_0 \alpha$  y la ordenada al origen es  $l_0$ . De ahí se obtiene  $\alpha$
15.  $\sin \theta_1$  vertical,  $\sin \theta_2$  horizontal; la pendiente es  $\mu_2/\mu_1$
16.  $1/s$  vertical,  $1/s'$  horizontal, cada coordenada al origen es  $1/f$ ; o bien  $ss'$  vertical,  $s + s'$  horizontal, la pendiente es  $f$
17.  $1/c$  vertical,  $\omega^2$  horizontal, la pendiente es  $L$
18.  $F$  vertical,  $1/r^2$  horizontal; verifique si es lineal
19.  $F$  vertical,  $i_1 i_2 / r^2$  horizontal; verifique si es lineal, y compare  $F$  vs.  $i_1$ ,  $F$  vs.  $i_2$  y  $F$  vs.  $1/r$

por separado, manteniendo las demás variables constantes

20.  $\log Q$  vertical,  $t$  horizontal; la pendiente es  $-1/RC$
21.  $Z^2$  vertical,  $1/\omega^2$  horizontal; la pendiente es  $1/c^2$  y la ordenada al origen es  $R^2$

22.  $m^2$  vertical,  $m^2v^2$  horizontal; la pendiente es  $1/c^2$  y la ordenada al origen es  $m_0^2$
23.  $1/\lambda$  vertical,  $1/n^2$  horizontal; la pendiente es  $-R$ , la ordenada al origen es  $R/4$ .

## CAPITULO 6:

1. c)  $0.00129 \text{ ohm}^2 \text{ seg}^2$   
 d)  $0.00572 \text{ henry}$   
 e)  $0.00145 \text{ ohm}^2 \text{ seg}^2$ ,  
 $0.00117 \text{ ohm}^2 \text{ seg}^2$   
 f) El valor medido de  $L$  puede variar desde  $0.00544 \text{ henry}$  hasta  $0.00606 \text{ henry}$   
 g)  $6.00 \text{ ohm}$   
 h) El valor medido de  $R$  puede variar desde  $5.39 \text{ ohms}$  hasta  $6.43 \text{ ohms}$   
 i)  $L = 0.0057 \pm 0.0004 \text{ henry}$   
 $R = 6.0 \pm 0.6 \text{ ohms}$
2. La media es  $17.54$  y la desviación estándar de la media es  $0.26$
3. a) La pendiente es de  $0.0499 \text{ ohm grado}^{-1}$ , y la ordenada al origen es  $11.92 \text{ ohms}$   
 b)  $\alpha = 0.00419 \text{ grados}^{-1}$   
 c)  $0.0024 \text{ ohm grado}^{-1}$ ,  
 $0.16 \text{ ohm}$   
 d)  $0.00021 \text{ grado}^{-1}$   
 e)  $\alpha = 0.00419 \pm$   
 $0.00021 \text{ grado}^{-1}$   
 $R_0 = 11.92 \pm 0.16 \text{ ohm}$
4.  $a = 2.12$ ,  $b = 2.98$
5. a)  $i = 0.5 e^{2v}$   
 b)  $y = 0.6 x^{2.4}$   
 c)  $f = 6.2 e^{-365/T}$
6. b)  $0.73$
7.  $0.99$

# Índice

- Ajuste de curvas por mínimos cuadrados, 132
- Ajuste polinomial usando tabla de diferencias, 183
- Análisis dimensional, 99
- Análisis estadístico de cantidades experimentales, 114
  
- Búsqueda de funciones, 134
  
- Cálculo de incertidumbres, método general, 20
- Cantidades calculadas
  - desviación estándar de, 43
  - incertidumbre en, 14
- Cifras significativas, 23, 135
- Cocientes
  - desviación estándar de, 49
  - incertidumbre en, 22
- Coefficiente de correlación, 145
- Comparación entre modelos y sistemas, 70 y sigs., 117 y sigs.
  
- Compensación de errores, 23
- Correlación, 140
- Curva suave, usos, 62 y sigs.
  
- Desviación estándar
  - de la desviación estándar, 42
  - de la distribución de Gauss, 35, 169
  - de la media, 38
  - de la ordenada al origen, 131, 175
  - de la pendiente, 131, 174
  - de valores calculados, 43
  - definición, 32
  - mejor estimación del universo, 40
- Desviaciones estándar de la muestra, distribución de, 39
- Diagramas en los informes, 156
- Diferencias
  - desviación estándar de, 48
  - en el diseño del experimento, 103
  - incertidumbre en, 19
- Diferencias finitas, cálculo de, 178
- Discusión en los informes, 160
- Diseño de experimentos, 83 y sigs.

- Distribución, concepto de, 27
- Distribución de Gauss, 33 y sigs.
  - área bajo la curva, 34, 169
  - desviación estándar, 34, 169
  - ecuación de, 33, 164
- Distribución de Poisson, 33
- Distribución normal (véase Distribución de Gauss)
  
- Entrada, 2
- Error sistemático, 12
- Errores de calibración, 12
- Extrapolación
  - gráfica, 64
  - usando tabla de diferencias, 183
  
- Fluctuación estadística, 26
- Forma de línea recta, 85
- Formato de los informes, 151
- Funciones exponenciales
  - desviación estándar de, 49
  - gráfica de, 136
  - incertidumbre en, 17
- Funciones logarítmicas
  - desviación estándar de, 49
  - incertidumbre en, 17
- Funciones trigonométricas
  - desviación estándar de, 49
  - incertidumbre en, 17
  
- Gráficas
  - en los informes, 159
  - lineales, 76 y sigs.
  - logarítmicas, 90, 135
  - trazado de, 116
- Gregory-Newton, fórmula de, 182
- Grupo de control, 105
  
- Histograma, 28
  
- Incertidumbre
  - absoluta, 11
  - definición, 11
  - en cantidades calculadas, 13
  - en cantidades experimentales, 113
  - en gráficas, 116
  - relativa, 12
- Informes
  - diagramas, 156
  - discusión, 159
  - formato, 151
  - gráficas, 159
  - introducción, 152
  - precauciones, 156
  - procedimiento, 155
  - propósito, 154
  - resultados, 157
  - significación de, 149
  - título, 151
- Interpolación
  - gráfica, 63
  - usando la fórmula de Gregory-Newton, 182
- Introducción en los informes, 152
  
- Media
  - definición, 30
  - ponderada, 175
- Mediana, 29
- Medias de la muestra
  - distribución de, 38
  - y mínimos cuadrados, 172
- Medida
  - naturaleza de, 9
  - patrones de, 8
- Mínimos cuadrados
  - desviaciones estándar, 131, 174
  - funciones no lineales, 132
  - media de las muestras, 172
  - ordenada al origen, 131, 173
  - pendiente, 131, 173
  - ponderados, 132, 176
  - precauciones con, 133
  - principio de, 128
- Moda, 29
- Modelos
  - concepto de, 55

- empíricos, 62
- prueba de, 70 y sigs.
- teóricos, 68
- Muestreo, 37
  
- Ordenada al origen
  - desviación estándar de, 132, 176
  - por mínimos cuadrados, 130, 173
  
- Pendientes
  - desviación estándar de, 174
  - determinación de, 125
  - incertidumbre en, 126
  - por mínimos cuadrados, 130, 173
- Planeación de experimentos, 92 y sigs
- Población (véase Universo)
- Ponderación
  - en las medias, 175
  - en mínimos cuadrados, 132, 176
- Potencias
  - desviación estándar de, 49
  - incertidumbre en, 16
- Precauciones en los informes, 156
- Precisión
  - definición, 12
  - del experimento, 94, 137
- Presentación digital, incertidumbre en, 10
- Procedimiento en los informes, 154
- Productos
  - desviación estándar de, 46
  - incertidumbre en, 21
- Propósito en los informes, 154
  
- Rechazo de lecturas, 50
- Rectificación de ecuaciones, 85
- Redondeo, 10
- Representación polinomial, 136
- Resultados en informes, 157
  
- Salida, 2
- Sistema, definición, 2
- Suavización de las observaciones, 186
- Sumas
  - desviación estándar de, 46
  - incertidumbre en, 19
  
- Tablas de diferencias, 180
- Teorema de Stirling, 166
- Título de los informes, 151
  
- Universo
  - definición, 35
  - desviación estándar, 36, 39
  - media, 36
  
- Variable de entrada, 83
- Variable de salida, 83
- Variables compuestas, graficación de, 87
- Variables significativas, 54