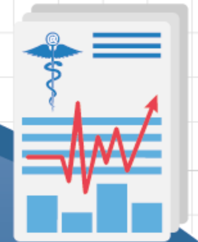


Bioestadística

Sexto Semestre

31153636

Unidad 1

Fundamentos de Inferencia Estadística

Programa desarrollado

División de Ciencias de la Salud, Biológicas y Ambientales

Fundamentos de inferencia estadística

Contenido

1. Fundamentos de Inferencia Estadística

La estadística inferencial y la estadística **descriptiva** conforman las dos grandes ramas de la estadística. La primera de estas ramas nos enseña cómo organizar y resumir datos para su mejor y más fácil manejo, mientras que la segunda rama nos instruye sobre cómo tomar decisiones, con relación a toda una población estadística, usando la información de tan solo una parte (**muestra**) de dicha población. Muchas fuentes de información nos muestran estas dos ramas como una bifurcación en el camino del aprendizaje de esta disciplina, sin embargo, aunque la bifurcación existe en términos conceptuales, desde el punto de vista práctico, en realidad todo análisis estadístico implica un proceso **descriptivo** inicial. Podríamos decir entonces que toda estadística es **descriptiva**, pero aquélla que se hace a partir de una **muestra**, es además de tipo **inferencial**.

Es recomendable que, antes de iniciar esta asignatura, realices un repaso exhaustivo de los temas que aprendiste en la materia Estadística Básica, pues te será indispensable un manejo correcto de conceptos como: variable, tipo de variable, estadístico, parámetro, población, tabla de frecuencia, tipo de gráficas, descriptores de tendencia central y de dispersión, muestra, muestreo y aleatoriedad, entre otros.

Revisemos ahora ¿qué significa inferencia estadística?, o de manera más general ¿qué es inferir? Si nos remitimos a la raíz etimológica, la palabra inferir significa literalmente “llevar dentro”; por otra parte, si revisamos cualquier diccionario se observa que una de las acepciones más socorridas es algo así: “deducir, concluir o suponer algo, a partir de un algo previo”. Entonces, nosotros nos quedaremos con la siguiente definición general de **inferencia**: “**concluir o suponer algo a partir de un algo previo**”. Y, en estadística, ¿cómo se aplica esta definición? Para contestar esta pregunta nos es útil recordar nuestras clases de lógica de la preparatoria. Observa la siguiente tabla:

Tabla 1. Relación de los tipos de pensamiento lógico con el concepto de inferencia

Pensamiento Deductivo: va de lo general a lo particular	**Pensamiento Inductivo**: va de lo particular a lo general
Ejemplo: Sé que **todos** los perros de mi casa son de color negro; entonces, puedo concluir que **cualquier** perro que yo me encuentre al salir a mi patio, será negro.	**Ejemplo:** Cada vez que veo **algunas** ardillas en el bosque, estas se comportan hiperactivamente, entonces, puedo suponer que **todas** las ardillas del bosque se comportan de forma muy activa.

Ahora simplemente traslademos estas ideas a la estadística:

- ✓ Si hago una prueba estadística usando como fuente de información a **toda la población** de estudio, entonces cualquier conclusión que obtenga se puede aplicar a un elemento en particular de dicha población; y en este caso estoy usando estadística deductiva, a la cual se le suele llamar estadística descriptiva
- ✓ Si hago una prueba estadística usando como fuente de información a **solo una muestra** de la población de estudio, entonces cualquier conclusión obtenida sobre esa muestra la podré inferir a toda la población de estudio como una suposición fundada; y en este caso estoy aplicando estadística inductiva, a la cual se le llama estadística inferencial. Algunos definen este concepto estadístico simplemente como "generalizar"

Finalmente, tratemos de redondear este razonamiento entendiendo que, en estadística, para suponer algo es necesario tener un esquema que le otorgue fundamento y claridad a dicha suposición; y este esquema fundamental que da sustento a toda inferencia estadística, es la **teoría de la probabilidad**.

1.1. Nociones de probabilística

Todos hemos escuchado alguna vez expresiones como esta: "la probabilidad de que se salve el paciente es del 50%", o "la probabilidad de que gane el equipo X es del 80 por ciento". Tales aseveraciones son bastante cotidianas en muchas áreas de nuestra vida y la mayoría de nosotros tiene un conocimiento intuitivo de lo que significa probabilidad; pero, ¿qué es exactamente la probabilidad?

En algunas áreas del conocimiento, a veces sucede que las definiciones no nos ayudan como esperamos (particularmente si son definiciones matemáticas); sin embargo, aquí echaremos mano de ellas como punto de partida. Así es que revisemos algunas definiciones de **probabilidad** matemática.

1.1.1. Definición de probabilidad

El diccionario de la Real Academia Española (2014) nos da la siguiente definición de probabilidad: "**En un proceso aleatorio,** [es la] **razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles**":

Otro diccionario, el del Portal de Divulgación Estadística de la Escuela Andaluza de Salud Pública, Divestadística (s/f), menciona que la probabilidad es la "**Medida adimensional que cuantifica la ocurrencia de los fenómenos producidos por azar**".

Y la definición de la enciclopedia Concepto.de (2018), dice que la probabilidad **"…se entiende como la posibilidad que existe de que un determinado hecho probable realmente suceda. Ese hecho puede finalmente suceder, o no suceder**."

Hasta aquí, ya podemos ir construyendo nuestra propia definición muy general de probabilidad, y podemos describirla como: **probabilidad es cuantificar la posibilidad de que algo ocurra**. Y ahora debemos señalar algunos puntos relevantes,

- ✓ Posibilidad y probabilidad son conceptos diferentes; por ejemplo, mientras nadie demuestre lo contrario, es perfectamente **posible** que haya humanos viviendo en el planeta Júpiter, pero, ¿qué tan **probable** es algo así?
- ✓ Cuando decimos que algo es **probabilístico**, estamos implicando que ese "algo" incluye la noción de **incertidumbre**, es decir, que puede suceder o no suceder
- ✓ En general, para calcular una probabilidad (para cuantificar las posibilidades de que algo ocurra) se necesita un contexto, un antecedente o un conocimiento previo

Y lo anterior nos deja preparados para entender que en matemáticas existen dos enfoques de probabilidad: **i)** la probabilidad clásica, a priori o teórica, y **ii)** la probabilidad de frecuencia relativa, a posterior o empírica. Veamos en qué consiste cada enfoque.

Probabilidad clásica o a priori. Esta visión de la probabilidad parece ser la más antigua, y la idea original de pensar en términos de probabilidades se originó en el contexto de los juegos de azar. Las preguntas básicas que se hacían los jugadores eran algo así: ¿Qué tan probable es que, al tirar un dado, este caiga en el número 5?, o ¿qué probabilidad hay de que al sacar una carta de la baraja española, dicha carta sea un as?

En este enfoque clásico, las probabilidades se calculan de manera teórica o abstracta pues no hace falta repetir el experimento (tirar dados o sacar cartas) para saber todo lo que puede suceder; sabemos que la probabilidad de que el dado caiga en 5 es de 1/6 y sabemos que la posibilidad de sacar un as de esa baraja es de 4/40.

Y ¿cómo lo sabemos? Pues, porque el dado tiene 6 caras y sólo una de ellas es el número cinco, y porque la baraja tiene en total 40 cartas, de las cuales solo 4 son ases. Entonces, la definición para la probabilidad clásica, según Daniel (2002), es la siguiente:

Si un evento puede ocurrir de *N* formas, las cuales se excluyen mutuamente y son igualmente probables, y si *m* de esos eventos poseen la característica *E*, la probabilidad de ocurrencia de *E* es igual a *m/N*

Y la expresión matemática de esta definición sería: $P(E)=m/N$

Donde $P(E)$ se lee como "probabilidad de E "

"Traduzcamos" esta definición con el caso del dado: "si al lanzar un dado, este lanzamiento puede ocurrir en 6 (N) resultados (1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6) los cuales no pueden ocurrir juntos y tiene la misma probabilidad de suceder (esto es, que no esté cargado el dado), y si uno (*m*) de esos eventos posee la característica de ser el número 5 (*E*), entonces la probabilidad de la ocurrencia del 5 (*E*) es igual a 1/6 (*m*/*N*). Para este caso, la definición nos dice que, de seis posibles resultados diferentes e igualmente probables, cada uno tiene 0.16666 de probabilidad de ocurrir.

Probabilidad de frecuencia relativa o a posteriori. Este enfoque nos indica que la expresión de probabilidad de un proceso o experimento depende de dos aspectos:

- Poder registrar la repetitividad de ese proceso o experimento, y
- Poder registrar las veces que, en ese experimento, ocurre el evento deseado

Y la definición que nos brinda Daniel (2002) se muestra en el cuadro siguiente:

Si algún proceso es repetido un gran número de veces *n*, y si algún evento resultante con la característica *E* ocurre *m* veces, la frecuencia relativa de la ocurrencia de *E*, *m/n*, es aproximadamente igual a la probabilidad de *E*

Aunque el concepto varía algo, la expresión matemática es casi la misma: $P(E)=m/n$

La probabilidad a posteriori (de frecuencia relativa), debe resultar más fácil para ti, ya que en el curso **Estadística Básica** usaste tablas de frecuencia. Veamos como ejemplo el experimento (o proceso) de "medir" el color a los perros de mi colonia; entonces, salgo a la calle y mido, digamos 50 perros (*n*), y hago el registro en una tabla como sigue:

Tabla 2. Tabla de frecuencias para el ejemplo del enfoque "a posteriori" de la probabilidad.

Color (*E*) de los perros medidos	Frecuencia *m* (perros de un mismo color *E*)	Frecuencia Relativa (*m/n*)
Café	**18**	**18/50=0.36 Probabilidad aprox. de que un perro tomado al azar de mi colonia, sea café**
Negro	**10**	**10/50=0.2 Probabilidad aprox. de que un perro tomado al azar de mi colonia, sea negro**
Blanco	**22**	**22/50=0.44 Probabilidad aprox. de que un perro tomado al azar de mi colonia, sea pinto**
C/color es el resultado *E* que ocurrió	**Total=*n*=50 Experimento "medición de color del perro", se repitió 50 veces**	**Total=0.36+0.2+0.44=1**

Y con esta tabla podemos comentar lo siguiente:

A. Al experimento lo podemos identificar como "medir el color a los perros de mi colonia"
B. La variable "color de los perros de mi colonia", puede tomar como valor cada uno de los tres colores registrados: "café", "negro" o "blanco"
C. Cuando *E* toma el valor "café," entonces la frecuencia m=18 y $P(E_{café})$=18/50=0.36
D. Cuando *E* toma el valor "negro," entonces m=10 y $P(E_{negro})$=10/50=0.20
E. Cuando *E* toma el valor "blanco," entonces m=22 y $P(E_{blanco})$=22/50=0.44

En resumen, si me interesa conocer una aproximación de la probabilidad de que, al tomar un perro al azar de mi colonia, dicho perro sea de color café, pues tomo el cálculo del inciso **C**. Si queremos obtener una aproximación de que ese perro tomado al azar sea negro, pues tomo el cálculo del inciso **D**. Y finalmente, si deseo saber cuál es la probabilidad aproximada de que el perro sea blanco, pues tomo el cálculo del inciso **E**.

Antes de pasar al siguiente tema, lee y analiza con cuidado el siguiente cuadro y resuelve los ejercicios planteados al final de esta sección.

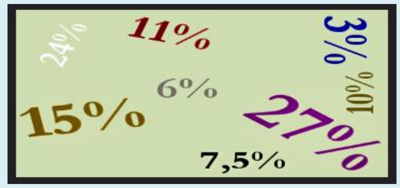
IMPORTANTE

Aunque usar porcentajes es válido, la forma más apropiada de expresar las probabilidades es la proporción. Un evento **nunca** ocurrirá si su probabilidad de ocurrencia es igual a **cero**, pero si su probabilidad es igual a **uno**, entonces es **seguro** que ocurrirá.

Por definición, una proporción siempre estará entre 0 y 1

$0 \leq \text{proporción} \leq 1$

Y si la multiplicas por 100, obtienes un porcentaje



Ejercicios para la sección 1.1.1

1. Investiga al menos 3 diferentes definiciones de probabilidad. Posteriormente elige la que creas que es la más adecuada y explica ¿por qué la elegiste?
2. Imagina un dado en el cual el número 2 aparece en tres de sus caras, y responde ¿cuál es la probabilidad de que, al lanzar ese dado, el resultado sea un número 2?
3. En una baraja española (40 cartas), ¿cuál es la probabilidad de que, al sacar una carta, dicha carta corresponda a la familia o palo de las espadas?
4. En una bolsita de las golosinas “lunetas” vienen 60 unidades: 21 azules, 19 rojas y 20 amarillas; después de agitar la bolsita varias veces, ¿qué probabilidad hay de que, al sacar una luneta, esta sea roja?, y ¿qué probabilidad hay de que, al sacar una luneta, esta **no** sea azul?
5. El Prof. Memo tiene 43 alumnos de sexto de primaria y ha realizado una encuesta para saber ¿cuál es la materia favorita de sus alumnos? Como opciones les dio: Educación Física, Educación Artística, Español, Ciencias Naturales y Matemáticas. De su pequeña encuesta obtuvo estos resultados: 18 alumnos eligieron Educación Física, 8 prefirieron Educación Artística, 10 señalaron Español, 5 eligieron Ciencias Naturales y solo 2 optaron por Matemáticas. Con estos datos elabora tu tabla de frecuencias, calcula las frecuencias relativas y responde a lo siguiente:
   i) ¿Cuál es la probabilidad de que tomando al azar uno de estos alumnos, su materia favorita sea Matemáticas?
   ii) ¿Cuál es la probabilidad de que tomando al azar uno de estos alumnos, su materia favorita sea Educación Artística?
   iii) ¿Cuál es la probabilidad de que tomando al azar uno de estos alumnos, su materia favorita sea Español?
   iv) ¿Cuál es la probabilidad de que tomando al azar uno de estos alumnos, su materia favorita **no** sea Matemáticas?

1.1.2. Axiomas de probabilidad

En la sección anterior hemos abordado el cómo definir y entender el concepto general de probabilidad, también hemos comentado que todos tenemos una idea intuitiva de lo que es la probabilidad, y al finalizar la sección, hemos concretado esa idea a través de varias definiciones y de algunos ejercicios muy sencillos. Lo que sigue ahora es conocer los enunciados axiomáticos que dan formalidad a la teoría de la probabilidad, los cuales nos serán muy útiles en las secciones posteriores.

En internet hay bastante material que nos puede ilustrar sobre la historia de la teoría de probabilidades y los personajes que participaron en ella a lo largo de más de tres siglos y medio. En este proceso intervinieron personajes tan notables como Pascal, Fermat, Gauss, Poisson, Bayes, Bernoulli, Laplace Legendre y varios más; pero fue en 1933 cuando el matemático Andréi Kolmogórov le dio a esta teoría la estructura axiomática formal que hoy conocemos (Restrepo y González, 2003).

Tales axiomas de la teoría de la probabilidad son los siguientes (Daniel, 2002):

1. La probabilidad de cualquier evento, en un experimento, es un número no negativo; o sea que, toda probabilidad de un evento debe ser igual o mayor que cero. Dicho de otro modo, no existen valores negativos de probabilidad. La notación matemática adecuada para este axioma es: $P(E_i) \geq 0$

2. La suma de las probabilidades de todos los eventos (resultados) posibles, mutuamente excluyentes, es igual a uno. Esto es importante pues implica que para calcular las probabilidades de un resultado en particular, debemos tomar siempre en cuenta a todos los resultados posibles y sus respectivas probabilidades, de tal modo que todas las opciones y sus probabilidades, en conjunto, representan la unidad o el 100%. Aquí es importante recalcar que hablamos de resultados mutuamente excluyentes, es decir, que no pueden suceder dos resultados diferentes al mismo tiempo. La notación matemática correspondiente es: $P(E_1) + \ldots + P(E_n) = 1$

3. La probabilidad de que suceda un evento "i" (E_i) o un evento "j" (E_j), es igual a la suma de sus probabilidades individuales. Esta propiedad se relaciona directamente con la anterior, pues si la totalidad (1 o 100%) es la suma de las probabilidades de todos los posibles eventos o resultados, entonces la probabilidad de ocurrencia de cualquiera de los dos en particular, es solo una parte de esa suma total. La notación correcta de este axioma es: $P(E_i \text{ o } E_j) = P(E_i) + P(E_j)$

Intentemos ilustrar estos axiomas con nuestro ejemplo de los perros; para ello, volvamos a observar la tabla 2 y revisemos si se cumplen tales axiomas en ese caso específico.

Recordemos que las frecuencias relativas son la probabilidad aproximada de cada evento, así es que debemos concentrarnos en la columna final de nuestra tabla.

Primer Axioma. Observamos y vemos que no existen números negativos en la columna de frecuencias de nuestra tabla. ¡Correcto!

Segundo Axioma. En la celda final de la última columna de la tabla, vemos y comprobamos que la suma de probabilidades es igual a uno, ¡Perfecto!

Tercer Axioma. Supongamos que deseamos saber cuál es la probabilidad de que un perro, tomado al azar, sea blanco o sea café, cualquiera de los dos colores. Entonces, de acuerdo a nuestro tercer axioma el resultado debería ser 0.8, puesto que debemos sumar 0.36 (probabilidad de que sea café) y 0.44 (probabilidad de que sea blanco).

Ahora, razonemos así: la probabilidad buscada es exactamente lo mismo que querer saber la probabilidad de que el perro elegido **no** sea negro, ¿cierto?... ¡Pues claro! Ya que solo hay tres opciones – café, negro o blanco –, si el perro no es negro, forzosamente será café o blanco. Y entonces partiendo del segundo y del tercer axioma tenemos que,

$$P(\text{Color del Perro}_{\text{café}}) + P(\text{Color del Perro}_{\text{negro}}) + P(\text{Color del Perro}_{\text{blanco}}) = 1$$

$$0.36 + 0.20 + 0.44 = 1$$

En consecuencia, la probabilidad de que el perro **no** sea de color negro es igual a **1** menos la probabilidad de que **sí** sea negro,

$$P(\text{Color del Perro}_{\text{NO negro}}) = 1 - P(\text{Color del Perro}_{\text{negro}}) \qquad (1)$$

Y sabemos que si es perro NO es negro, pues tiene que ser café o blanco,

$$P(\text{Color del Perro}_{\text{NO negro}}) = (\text{Color del Perro}_{\text{café o blanco}}) \qquad (2)$$

Y si sustituimos la igualdad (*2*) en la (*1*), tenemos que,

$$(\text{Color del Perro}_{\text{café o blanco}}) = 1 - P(\text{Color del Perro}_{\text{negro}}) \qquad (3)$$

Finalmente, tomando de la tabla el valor de $P(\text{Color de Perro}_{\text{negro}}) = 0.20$, y sustituyéndolo en la ecuación (*3*), resolvemos,

$$(\text{Color de Perro}_{\text{café o blanco}}) = 1 - 0.20 = 0.80$$

Y ¡voila! Efectivamente, la probabilidad de que el perro sea café o blanco es la suma de sus respectivas probabilidades individuales:

$$\mathbf{0.36 + 0.44 = 0.80}$$

Ahora revisemos las principales reglas de la probabilidad, así como su aplicación cuando eventos diferentes **sí** suceden al mismo tiempo y sí pueden afectarse unos a otros.

1.1.3. Reglas de la probabilidad, eventos no mutuamente excluyentes y eventos dependientes

En la sección inmediata anterior hemos revisado las reglas elementales o axiomáticas que son la base de la teoría de probabilidad, y en este punto es indispensable señalar que dichos axiomas son reglas expresadas en su forma más sencilla, la cual implica eventos o resultados mutuamente excluyentes (que no pueden suceder juntos) e independientes (que la probabilidad de uno no afecta la probabilidad de otro). Lo que haremos ahora es revisar varias reglas de la probabilidad, y, también, analizar el uso de estas reglas cuando eventos diferentes **sí** suceden al mismo tiempo y sí pueden afectarse unos a otros.

Antes de entrar en materia, preguntémonos ¿para qué sirven las reglas de la probabilidad? Y podemos responder a esta pregunta mencionando que estas reglas sirven para facilitar el cálculo de probabilidades en situaciones en las que no es tan sencillo o directo ese cálculo. Dicho lo anterior, empecemos nuestra revisión con las reglas que, de hecho ya hemos usado.

Propiedad o Regla de Complementariedad. Esta propiedad nos dice que la suma de las probabilidades de eventos complementarios es igual a 1, y la notación correcta sería:

$$P(E) + P(E^c) = 1$$

Lo que expresa esta igualdad es que la probabilidad de que ocurra un evento se complementa con la probabilidad de que no ocurra dicho evento, y esto se explica con el hecho de que la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles, debe sumar 1. Dicho de otro modo, la probabilidad de que ocurra un evento E, más la probabilidad de que ocurran los otros posibles eventos que no son E, deben sumar 1.

Esta propiedad puede ejemplificarse gráficamente con el siguiente diagrama (figura 1), en el cual todo el rectángulo representa la unidad y las dos partes, señaladas como E y E^c, se complementan para formar todo ese rectángulo.

Nota que el complemento E^c puede estar formado por varios eventos.

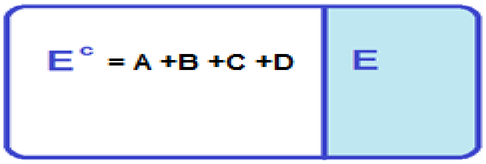


Figura 1. Diagrama que ilustra la propiedad de complementariedad

En nuestro ejemplo del tercer axioma (caso de los perros), usamos esta regla cuando ocupamos las expresiones (*1*), (*2*) y (*3*). Además, debes haber usado este razonamiento para dos de los ejercicios planteados al final de la sección 1.1.1.

Propiedad o Regla de Adición. Esta regla ya la vimos en lo referente al tercer axioma, al final de la sección 1.1.2; y la "comprobamos" con nuestro ejemplo de los perros. La regla axiomática nos dice que la probabilidad de que ocurra cualquiera de dos eventos, mutuamente excluyentes, es la suma de sus respectivas probabilidades:

$$P(E_i \text{ o } E_j) = P(E_i) + P(E_j)$$

Pero ¿qué pasaría si los eventos no fueran mutuamente excluyentes? Es decir que dos eventos puedan suceder al mismo tiempo. La cosa se complica, ¿no?

Podemos esquematizar esta situación imaginando que (como se muestra en la figura 2) las letras E_i y E_j representan dos posibles eventos: E_i = números primos entre 2 y 6, y E_j = números pares entre 2 y 6.Y vemos que claramente al número 2 le suceden ambas cosas: ser número par y ser número primo, por lo tanto los eventos E_i y E_j no son mutuamente excluyentes.

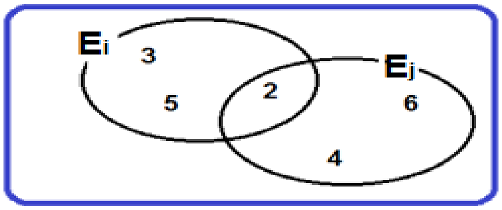


Figura 2. Diagrama que ilustra gráficamente un caso de eventos no mutuamente excluyentes

Si observas con cuidado la figura 2, estarás de acuerdo en que la probabilidad de que ocurra E_i o E_j no es simplemente la suma de sus probabilidades respectivas, pues si lo hiciéramos así, estaríamos contabilizando dos veces lo que corresponde al “2”. Para estos casos la regla de la adición nos brinda esta solución general:

$$P(E_i \text{ o } E_j) = P(E_i) + P(E_j) - P(E_i \text{ y } E_j)$$

Y ¿cómo interpretamos esta fórmula general? Pues simplemente, vemos que esta nueva expresión mantiene la suma original de probabilidades (en color verde), pero además incorpora la substracción de la probabilidad “compartida”.

Nota que esta nueva fórmula aplica para al caso cuando los eventos **no** son mutuamente excluyentes, y también aplica perfectamente para el caso en el que los eventos **sí** son mutuamente excluyentes. Esto es porque si los eventos son mutuamente excluyentes, no comparten ninguna probabilidad y entonces la expresión $P(E_i \text{ y } E_j)$ será igual a cero, Y si no hay nada que restar; la fórmula se convierte en la misma que conocimos inicialmente:

$$P(E_i \text{ o } E_j) = P(E_i) + P(E_j) \cancel{- P(E_i \text{ y } E_j)}$$

Ahora bien, es posible que a los matemáticos les puede interesar el análisis de que el número “2” pertenezca al grupo de los números pares y, además, sea un número primo. En la vida real, la situación en la que dos eventos puedan ocurrir al mismo tiempo, suele suceder cuando a los mismos individuos se les miden dos variables. Veamos el siguiente ejemplo.

> En una clínica se registraron a 20 pacientes con una infección. De estos pacientes algunos presentan febrícula, otros tienen fiebre y otros más tienen una temperatura normal. Todos los pacientes son varones, pero pertenecen a diferentes grupos de edad. Con esa información organizada en la tabla 3, respondamos lo siguiente:

¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un enfermo al azar, ese enfermo sea anciano o presente fiebre?

Tabla 3. Tabla de frecuencias para el ejemplo de aplicación de la regla de adición con eventos no mutuamente excluyentes.

	Síntomas de la Infección			
Grupo Etario del Paciente	**Tº normal**	**Febrícula**	**Fiebre**	**total parcial**
Ancianos	**3**	**2**	**4**	**9**
Hombres	**2**	**3**	**1**	**6**
Niños	**1**	**2**	**2**	**5**
total parcial	**6**	**7**	**7**	**Total total = 20**

Para la resolución del problema es muy importante recordar y subrayar tres cosas:

- Debemos recordar que la frecuencia con que ocurre un evento es la probabilidad (aproximada) de dicho evento y,
- E_i y E_j, ahora se pueden identificar como A y B, pues son eventos de variables diferentes – las variables son grupo etario y nivel de fiebre-.
- Debemos identificar que para obtener la probabilidad de P(A y B), solo hay que ubicar el cruce entre la columna y la fila correctas, y luego usar esa frecuencia para calcular la probabilidad deseada.

Con estos tres puntos en mente, solo debemos aplicar la regla general de la adición, tomar los datos de la tabla y sustituirlos en la fórmula,

$$P(A_{anciano} \text{ o } B_{fiebre}) = P(A_{anciano}) + P(B_{fiebre}) - P(A_{anciano} \text{ y } B_{fiebre})$$

$$P(A_{anciano} \text{ o } B_{fiebre}) = 9/20 + 7/20 - 4/20 = 0.45 + 0.35 - 0.20 = \mathbf{0.60}$$

Y la respuesta a la pregunta es que la probabilidad de que un enfermo tomado al azar sea anciano o tenga fiebre, es de 0.60 o 60%.

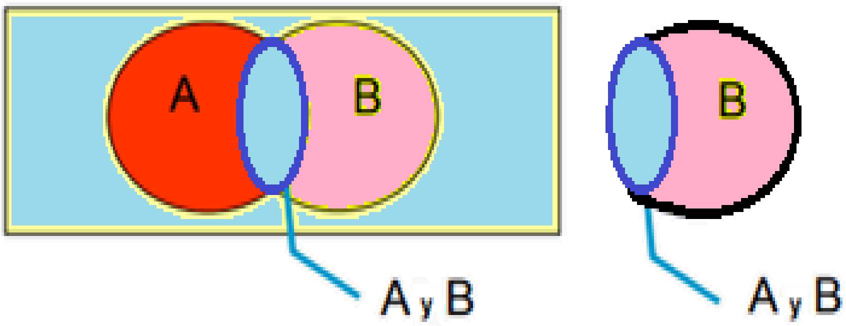
Si te quedaron dudas con este ejercicio, lee de nuevo esta parte y observa que en la tabla 3 están señaladas en color rojo las frecuencias que usamos en la fórmula,

$P(A_{anciano}) = 9/20$, porque de 20 enfermos, 9 son ancianos

$P(B_{fiebre}) = 7/20$, porque de 20 enfermos, 7 tienen fiebre, y

$P(A_{anciano} \text{ y } B_{fiebre}) = 4/20$, porque de 20 enfermos, solo 4 son ancianos y tienen fiebre al mismo tiempo

Regla de Condicionalidad. Esta regla se ocupa de aquellos casos en que se busca la probabilidad de que ocurra un evento, dado que ya ocurrió otro evento, y su fórmula y su diagrama ilustrativo son los siguientes,



P(A dado que B) = P(AyB) / P(B)

Figura 3. Diagrama que ilustra gráficamente un caso de eventos *dependientes*.

Regla de condicionalidad

Esto ocurre cuando la probabilidad de ocurrencia de un evento **depende** de la probabilidad de ocurrencia de otro evento. Una manera de describir esta probabilidad podría ser el decir que, primero nos concentramos en que sucedió B, y luego dentro de B, nos concentramos en que suceda A. Como podrás ver, la fórmula primero excluye la probabilidad de A que no es compartida con B, y después se concentra en la probabilidad de A dentro de B. Veamos un ejemplo sencillo,

Experimento = Lanzamiento de dos dados

Evento estudiado (éxito) = Una vez que suceda que los números de ambos dados sean iguales (**B**), se desea obtener que ambos dados sumen 10 o más (**A**).

Como ves, antes de calcular la probabilidad de que ambos dados sumen 10 o más (evento A), estamos reduciendo el universo de posibilidades al evento de que los dados caigan en números iguales (evento B); esta última es la condición. Veamos el proceso:

El total o universo de posibilidades en el lanzamiento de dos dados son las 36 posibles combinaciones que se muestran en la tabla 4. Los números en verde corresponden al primer dado y los números en rojo pertenecen al segundo dado.

Tabla 4. Posibles combinaciones para el experimento de lanzar dos dados. Ejemplo para la regla de probabilidad condicional. Primer dado en verde; segundo dado en rojo; evento B, en rosa; evento A, subrayado

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	**5,5**	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	**6,6**

En esta misma tabla podemos ver el evento B (dados con números iguales) señalado en los cuadros rosas. Y finalmente, entre los cuadros en color rosa podemos ubicar a solo dos combinaciones subrayadas, las cuales suman 10 o más y presentan números iguales en ambos dados.

Quizás, nuestro primer impulso sea calcular la probabilidad de los resultados **5,5** y **6,6** entre los 36 posibles resultados: 2/36. Pero **recuerda** que existe una condición previa para el evento deseado, la cual no estaríamos satisfaciendo con este cálculo directo. **Observa** además que hay varias combinaciones que suman 10 o más (6/36), pero no todas están compuestas por números iguales en ambos dados, lo cual es la condicionante preestablecida. Entonces, veamos cómo al aplicar la fórmula se logra la respuesta.

La probabilidad de que A y B ocurran juntos se refiere a cuando A y B comparten combinaciones entre todas las posibles combinaciones, y solo hay dos opciones que, siendo números iguales, también suman 10 o más, por lo tanto, esta probabilidad es 2/36.

Por otra parte, la probabilidad del evento B simplemente es el número de combinaciones de números iguales entre todas las posibles combinaciones, por lo tanto, esta probabilidad es 6/36. Ahora solo sustituimos los valores en la fórmula y tenemos,

P(A dado que B) = P(AyB) / P(B)

P(A dado que B) = (2/36) / (6/36) = 1/3 = 0.333 = 33.3%

Y ¡ya está!, nuestro resultado es que la probabilidad de A dado que B, es igual a **1/3**. Y esto es lo mismo que decir que la probabilidad de obtener para ambos dados una suma de 10 o más, dado que los números en ambos dados sean iguales, es de **33.3%**.

Nota también que podemos obtener este mismo resultado aplicando solamente un razonamiento lógico como sigue: como B es la condición, podemos eliminar todo lo que no es B, lo cual nos deja con un subconjunto de 6 combinaciones que ahora son nuestro total de posibles resultados, y a partir de ahí basta con identificar las combinaciones que componen A dentro de B, lo cual nos deja con 2 combinaciones-éxito entre un total de 6 posibles combinaciones, 2/6 = 1/3 = **0.333**

Repasa esta regla revisando los recursos siguientes:

Grillo-Soliz, C. M. (8 de febrero de 2013). *Probabilidad Condicional dados*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8vSe_7H8g4Q

WissenSync. (30 de julio de 2015). *Probabilidad Condicional*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=yVvj4dExgao

Regla de la Multiplicación. Esta regla nos permite calcular cuál es la probabilidad de que ocurran al mismo tiempo dos eventos (que obviamente **no** son mutuamente excluyentes) y corresponde a lo que nosotros denominamos como P(A y B).

Como ves, esta expresión ya la hemos usado en la exposición de algunas reglas anteriores, y para recordar esto observa de nuevo el dibujo del lado izquierdo en la figura 3 y revisa la siguiente figura (4).

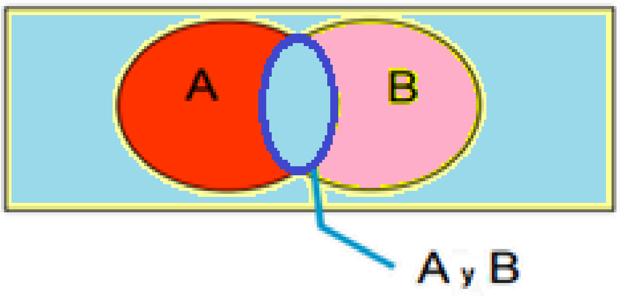


Figura 4. Diagrama que ilustra gráficamente un caso de eventos no mutuamente excluyentes. Regla de multiplicación.

Y para esta regla hay dos versiones:

I. Cuando los eventos A y B son independientes.- Para este primer caso, la fórmula solo requiere aplicar la multiplicación de las probabilidades respectivas de A y B,

$$P(AyB) = P(A) * P(B) \qquad (4)$$

II. Cuando los eventos A y B tienen una relación de dependencia.- En este segundo caso, ya que está implicada una condicionalidad o dependencia, debemos usar esta expresión,

P(AyB) = P(B) * P(A dado que B) (*5*)

O esta otra

P(AyB) = P(A) * P(B dado A)

Si observas, con cuidado te darás cuenta de que esta fórmula (*5*) es la misma que usamos para la regla de condicionalidad, pero en ella ha sido despejado la expresión P(AyB), pues ahora nos interesa solo la probabilidad compartida entre A y B.

Por otra parte, si recuerdas, la expresión P(AyB) ya la habíamos usado en el ejercicio de la regla de adición para eventos no mutuamente excluyentes, en el cual usamos el ejemplo de los varones enfermos; y en ese ejercicio, obtuvimos esta probabilidad de manera lógica usando la intersección de la columna y la fila adecuadas.

Aquí es importante señalar que un evento A es independientes de B solo si P(A dado B)=P(A) (*6*)

Ahora hagamos unos ejercicios para ambos casos de esta regla de multiplicación:

Ejercicio 1. Eventos Independientes.

Usando la tabla 4, calculemos la probabilidad de que al lanzar dos dados, el primero caiga en un número impar (evento A) y el segundo caiga un número par (Evento B).

Lo primero que debemos hacer es averiguar si ambos eventos son independientes o no usando la fórmula (*6*). Entonces tenemos que,

P(A dado que B) = 9/18 = 1/2 = 0.5

La expresión inmediata anterior es correcta porque entre todas las 36 opciones existen 18 opciones con número par en el segundo dado, y **dentro** de esos 18, solo 9 presentan un número impar en el primer dado.

P(A) = 18/36 = 1/2 = 0.5

Lo anterior también es cierto pues entre todos los 36 posibles resultados totales, los que resultan en un número impar en el primer dado, son 18.

Entonces P(A dado que B) **=** P(A), y por lo tanto, para este caso, los eventos A y B **sí** son independientes y podemos usar la regla de multiplicación por medio de la fórmula (*4*).

P(AyB) = P(A) * P(B)

P(AyB) = 0.5 *0.5 = **0.25**

El **resultado** obtenido para este ejercicio es que la probabilidad de que, al lanzar dos dados, el primero caiga en un número impar y el segundo dado caiga en un número par, es de **0.25**. Y esto lo podemos comprobar observando la tabla 4 y contando entre todos los 36 posibles resultados, cuántos resultados pueden caer número impar en verde y número par en rojo. Revisa esto y verás que lo que encuentras es 9/36 = 1/4 = **0.25**

Ejercicio 2. Eventos Dependientes.

Usando la misma tabla 4 calculemos la probabilidad de que, al lanzar un par de dados, resulte que la suma de dichos números es 10 o más (A) **y** al mismo tiempo obtengamos dos número iguales (B).

Nuevamente, lo primero es averiguar si ambos eventos son independientes, aplicando la fórmula (*6*); y para esto ubiquemos los componentes de dicha fórmula,

P(A dado que B) = 2/6 = 1/3 = 0.333

La expresión anterior es correcta porque, tal como vimos, de 6 posibles resultados de los dados con números iguales, solo dos resultados suman 10 o más.

P(A) = 6/36 = 1/6 = 0.166

Lo anterior también es cierto pues entre todos los 36 posibles resultados totales, los que sumen 10 o más son 6 resultados.

Y ya que P(A dado que B) **≠** P(A), entonces estos eventos **no** son independientes y debemos usar la fórmula (*5*),

P(AyB) = P(B) * P(A dado que B)

P(A dado que B) = 2/6 = 1/3 = 0.333

P(B) = 6/36 = 1/6 = 0.166

P(AyB) = 0.166 * 0.333 = **0.055**

En este ejercicio, la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga un **resultado** que sume 10 o más, y que además presenten números iguales en ambos dados, es de **0.055**.

Y esto también lo podemos comprobar observando la tabla 4, en la cual solo hay que identificar que, entre todas las posibles combinaciones (36), solo hay 2 que cumplen con ambos eventos: y esto es 2/36 = **0.055**

Cerremos esta sección indicando que, aunque en muchas fuentes de consulta sobre probabilidad se apoyan en la teoría de conjuntos, en esta unidad 1 hemos optado por no saturar las explicaciones con más elementos. Pero por otra parte, sí es conveniente que conozcas algunas expresiones que, significando lo mismo, pueden variar según el recurso de estudio que utilices. Por lo anterior, he aquí un breve glosario.

Espacio muestral o Universo = Conjunto de todos los eventos o resultados posibles

$\mathbf{A^C}$ = $\mathbf{\bar{A}}$ = **A’** = Complemento de A = Todo lo que no es A es un conjunto universo

$\mathbf{A \cup B}$ = A unión B = A **o** B = Que suceda cualquiera de los dos eventos

$\mathbf{A \cap B}$ = A intersección B = A **y** B = Que sucedan ambos eventos al mismo tiempo

A\B = A|B = A dado B = Que suceda A después de que ya sucedió B

Para practicar estas reglas, revisa el siguiente video y resuelve los siguientes ejercicios:

Evelio Hernández. (9 de noviembre de 2013). *Probabilidades. Nunca más lo complicado!!!!*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=2y6zs8o-YWg

Ejercicios para la sección 1.1.3

1. Con base en la tabla 3 calcula las probabilidad de que:
   - **i)** Un enfermo elegido al azar, **no** sea niño
   - **ii)** Un enfermo elegido al azar sea anciano, **o** hombre **o** niño.
   - **iii)** Un enfermo elegido al azar, sea hombre **y** niño a la vez
   - **iv)** Un enfermo elegido al azar, presente temperatura normal **o** sea hombre
   - **v)** Un anciano presente febrícula
   - **vi)** Un hombre tenga fiebre
   - **vii)** Un enfermo sea hombre **o** niño **y** que presente temperatura normal

2. Investiga, en el contexto de la teoría de la probabilidad, ¿qué significan las expresiones **con reemplazo** y **sin reemplazo**?

3. Con lo investigado en el punto anterior resuelve lo siguiente: en una bolsa hay 5 canicas verdes, 3 rojas y 2 azules. Calcula la probabilidad de que,
   - **a)** Al sacar 2 canicas de la bolsa, esas canicas sean azules
   - **b)** Sin reemplazar las canicas del inciso (a), al sacar otras dos canicas más, estas sean verdes

1.2. Distribuciones de probabilidad

En esta sección conoceremos lo que es y lo que representa una distribución de probabilidad, y para esto haremos primero un ejercicio introductorio. ¿Recuerdas el ejemplo de los perros? Bueno, pues retomemos esa idea, pero ahora con 120 perros (n=individuos) y 5 colores (posibles resultados o eventos); y con estos datos elaboremos cuatro **expresiones**: un enunciado descriptivo, una tabla, una gráfica y una fórmula que describan el comportamiento de los eventos y sus probabilidades. Entonces, nuestra descripción puede ser la siguiente:

> Para 120 perros, a los cuales se les midió el color, el cálculo de la frecuencia relativa nos indica que el color café tiene una probabilidad de ocurrencia de **0.15**, que el color negro tiene una probabilidad de ocurrencia de **0.0833**, el color blanco tiene una probabilidad de ocurrencia de **0.1833**, que el color pinto tiene una probabilidad de ocurrencia de **0.4583**, y que el color atigrado tiene una probabilidad de **0.125**.

La tabla queda así:

Tabla 5. Tabla de frecuencias para el experimento de medir el color de 120 perros

Color/perro	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
Café	18	0.15
Negro	10	0.0833
Blanco	22	0.1833
Pinto	55	0.4583
Atigrado	15	0.125
	Total=*n*=120 perros	Total=1

La gráfica queda así (figura 5):

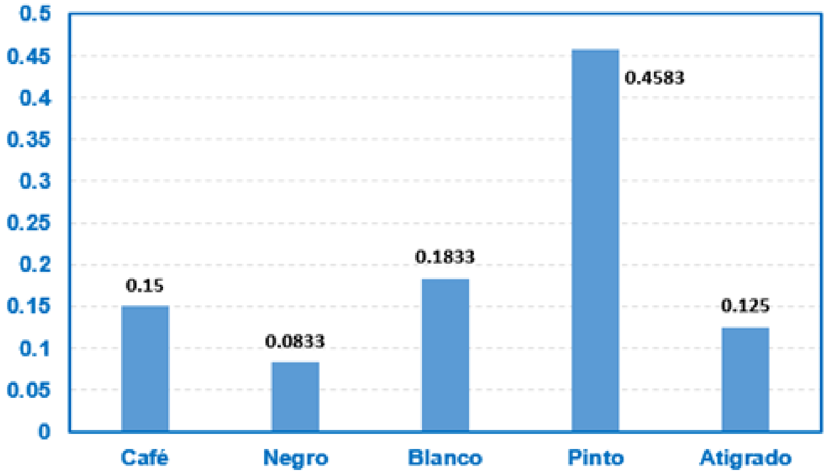


Figura 5. Gráfico de frecuencias para el experimento de medir el color de 120 perros. (Eje X= color de perro; Eje Y= frecuencia relativa).

Y nuestra fórmula (sin pretender formalidad matemática) podría quedar así:

$$P(E_{\text{color de perro}}) = P(E_{\text{café}}) + P(E_{\text{negro}}) + P(E_{\text{blanco}}) + P(E_{\text{pinto}}) + P(E_{\text{atigrado}})$$

$$P(E_{\text{color de perro}}) = 18/120 + 10/120 + 22/120 + 55/120 + 15/120 = 1$$

Ahora, observa las 4 expresiones elaboradas y reflexiona, ¿qué te dice cada una? En el siguiente tema constatarás que tan acertadas fueron tus reflexiones.

1.2.1. ¿Qué es una distribución de probabilidad?

Como seguramente habrás notado en el ejercicio introductorio, las cuatro expresiones – descripción, tabla, gráfico y fórmula – son cuatro formas de decir exactamente lo mismo. Y con esta muy obvia conclusión podemos dar la siguiente definición general:

Una distribución de probabilidad es una tabla, una gráfica, una fórmula, o cualquier otra representación, que asocia todos los posibles resultados de una variable aleatoria, con sus respectivas probabilidades de ocurrencia.

Esto en realidad no tiene mayor dificultad: cada vez que, en tus ejercicios de estadística básica, elaboraste una tabla de frecuencias, también estabas conformando una distribución de probabilidad para esos casos en particular. Pero ahora viene la pregunta más interesante:

¿Para qué sirve una distribución de probabilidad?

Recordemos que el origen del estudio de las probabilidades fue el juego de azar, así es que teniendo esto en mente, podemos puntualizar utilidades muy generales para estas distribuciones, por ejemplo:

- Calcular riesgos (de perder una apuesta)
- Prever situaciones (varios escenarios posibles para ganar o perder una apuesta)
- Predecir o pronosticar eventos (¿a qué resultado le debo apostar?)
- Presupuestar pérdidas (¿cuándo debo dejar de apostar?

En resumen, **se desea manejar, de manera racional y numérica, la incertidumbre que encierra cualquier proceso o experimento aleatorio, para así poder tomar mejores decisiones sobre dichos procesos y/o sus consecuencias**.

Algo muy importante que debemos puntualizar es esta sección, es la diferencia conceptual que existe entre una distribución de probabilidad teórica y una distribución de probabilidad empírica. Para esto, como primer punto, debemos recordar lo que estudiamos cuando describimos los tipos fundamentales de probabilidad: la probabilidad “a priori” o teórica y la probabilidad “a posteriori”, de frecuencia o experimental. Y como segundo punto podemos ilustrar el tema con otro ejercicio,

Si tomamos un dado normal, cada lado con un número del 1 al 6, podemos fácilmente y sin hacer nada más, definir las probabilidades de los posibles resultados,

$$\left.\begin{array}{l} P(E^{\text{número } 1}) = 1/6 = 0.1666 \\ P(E^{\text{número } 2}) = 1/6 = 0.1666 \\ P(E^{\text{número } 3}) = 1/6 = 0.1666 \\ P(E^{\text{número } 4}) = 1/6 = 0.1666 \\ P(E^{\text{número } 5}) = 1/6 = 0.1666 \\ P(E^{\text{número } 6}) = 1/6 = 0.1666 \end{array}\right\} \quad \text{Suma} = 1$$

La lista anterior es la distribución de probabilidad teórica (en este caso, una distribución uniforme), la cual podemos graficar como se muestra en la figura 6:

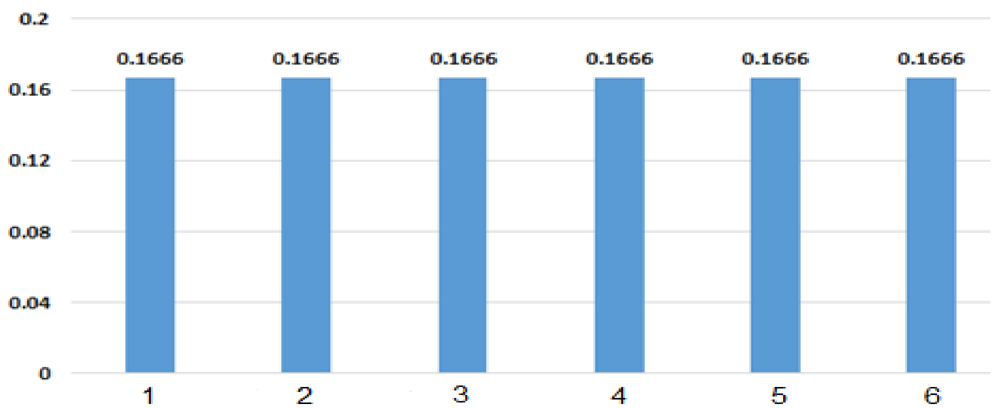


Figura 6. Gráfico de la distribución teórica de probabilidad para el experimento de lanzar un dado. (Eje X=posibles resultadosde lanzar un dado; Eje Y=frecuencia relativa).

Pero, y si hacemos los experimentos de lanzar el dado varias veces, ¿qué veríamos? Para averiguar esto, ve al siguiente link, lanzar el dado 5, 70, 600 y 2500 veces, y observa lo que muestran cada vez, tanto la tabla como el gráfico de frecuencias.

Pérez, J. E. (2016). *Gráfico frecuencia relativa lanzar Dado n veces*.
https://www.geogebra.org/m/tUVaWpvr

Y lo que resulta es la demostración de los que los investigadores llaman la **Ley de los Grandes Números**, esto es, que **las probabilidades experimentales se van pareciendo más a las teóricas cuando aumenta el número de experimentos.** Para comprobar esto observa tus lanzamientos y observa la figura 7.

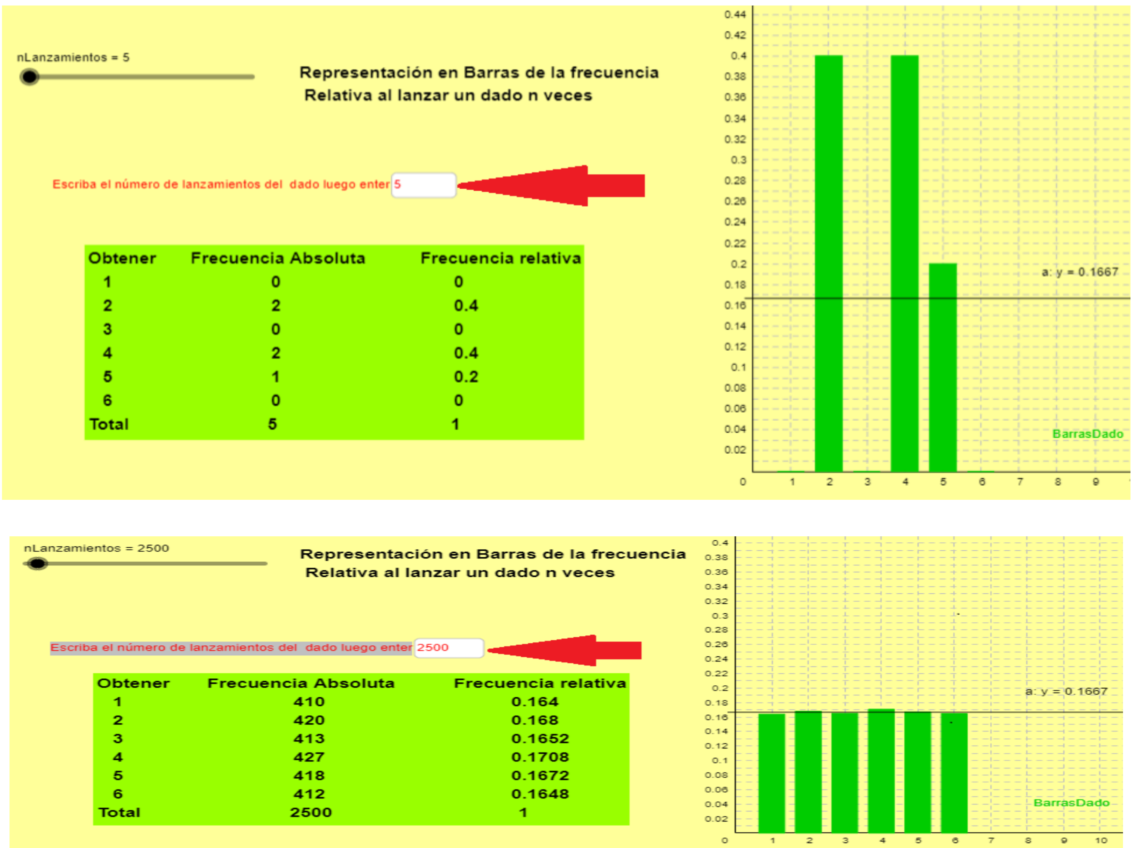


Figura 7. Distribución experimental de probabilidades del lanzamiento de un dado (Distribución de Probabilidad Uniforme). Cinco y 2500 lanzamientos.

Para este experimento del lanzar un dado, aunque se requiera de numerosos ensayos para comprobarlo, resultó que el modelo teórico es exacto, y esto es porque conocemos todos y cada uno de los eventos posibles que pueden resultar del experimento.

Ahora reflexionemos sobre lo siguiente: para cualquier otra variable que en un experimento se comporte probabilísticamente de manera similar al resultado de lanzar un dado, ¿podríamos usar este modelo teórico como referencia, en lugar de estar repitiendo el experimento infinidad de veces? Pues claro que la respuesta es **sí**.

Puntualicemos además que las distribuciones teóricas de probabilidad, no solo nos pueden ahorrar tiempo, sino que son modelos de referencia indispensables para muchas variables para las cuales, ni podemos medir a todos los individuos (recuerda que en la vida real se trabaja con muestras), ni podemos conocer experimentalmente todos los posibles eventos o resultados. Y esa es la función o utilidad principal de las distribuciones teóricas de probabilidad: **ser modelos de referencia para estudiar y/o usar y/o ajustar el comportamiento de muy diversas variables aleatorias**.

Por último, en esta sección debemos mencionar que todas las variables se clasifican en dos grupos - discretas y continuas,- y por ello existen modelos de distribución de probabilidades para variables discretas y modelos para variables continuas, como revisarás en el siguiente subtema.

1.2.2. Distribuciones de variables discretas

Para iniciar esta sección señalemos la definición que Daniel (2002) nos da sobre variable discreta: **"Una variable discreta se caracteriza por separaciones o interrupciones en la escala de valores que puede tomar. Estas separaciones o interrupciones indican la ausencia de valores entre los valores específicos que puede asumir la variable…"**

Este concepto ya debes conocerlo, pues es parte de la estadística básica que estudiaste en un curso previo. Ahora, revisemos los modelos teóricos de distribución de probabilidad de variables discretas más importantes.

Distribución Binomial.- Las características de la distribución binomial son las siguientes:

- Al experimento le llamamos Ensayo de Bernoulli
- A un grupo de ensayos de Bernoulli se le llama Proceso de Bernoulli
- Para cada ensayo, los dos posibles eventos son mutuamente excluyentes
- A uno de los posibles resultados se le denomina éxito y al otro fracaso
- A la probabilidad del éxito se le denomina "p", y a la probabilidad del fracaso se le denomina "q", y la suma de p más q es igual a 1
- La probabilidad de un éxito permanece constante de ensayo en ensayo
- El resultado de un ensayo no afecta ni es afectado por otro resultado
- Los descriptores que definen la forma de la curva (distribución), para cada caso específico, son "**n**" y "**p**"

La distribución binomial puede ser vista simplemente como la distribución de la probabilidad de un resultado de éxito-fracaso en un número determinado de experimentos. Y el algoritmo matemático para esta distribución es el siguiente:

$$P(X) = \frac{n!}{(n-X)!\,X!}\,(p)^X\,q^{n-X}$$

Donde, X = número de éxitos buscados

n = número de experimentos (ensayos)

p = probabilidad del éxito

q = 1-p = probabilidad del fracaso

Con esta información, hagamos ahora un par de ejercicios.

Ejercicio 1. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar 3 veces una moneda, exactamente 2 de esos lanzamientos caigan en “águila”?

Primero identifiquemos la información que tenemos,

X = se buscan 2 éxitos (“águilas” en este caso)
n = 3 (ensayos)
p = 0.5
q = 1 -p = 0.5 (probabilidad de que caiga en “sol”, que es el fracaso)

Luego, sustituimos, simplificamos y resolvemos según la fórmula.

$$P(X) = \frac{3!}{(3-2)! * (2!)}\ 0.5^2 * 0.5^{3-2}$$

$$P(X) = \frac{3*2*1}{(1) * (2*1)}\ 0.5^2 * 0.5$$

$$P(X) = \frac{6}{2}\ (0.25) * (0.5)$$

$$P(X) = 3 * 0.125 = 0.375$$

Y la probabilidad de obtener exactamente 2 “águilas” en 3 lanzamientos de una moneda, es igual a **0.375**

Ahora resolvamos el mismo problema con lo que ya sabemos sobre probabilidades. Entonces, primero calculamos cuántos y cuáles son los posibles resultados o combinaciones de estos tres ensayos, para lo cual usamos un diagrama de árbol (figura 8).

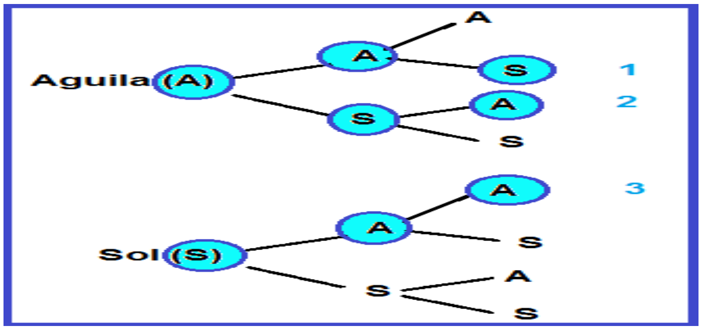


Figura 8. Diagrama de árbol. Combinaciones posibles al lanzar una moneda 3 veces.

En dicho diagrama (figura 8) se aprecia que el total de posibles resultados es 8, y las combinaciones que presentan solo 2 “águilas”, son 3; luego entonces la probabilidad buscada es **3/8 = 0.375**

Este caso es muy sencillo; pero imagina que tuvieras que hacer los cálculos para 500 ensayos y buscando 35 éxitos; en tal caso, dichos cálculos se hacen muy tediosos y hasta complicados. Afortunadamente, existen autores que se han dado a la tarea de elaborar tablas en las que puedes encontrar las probabilidades para diferentes “X”, con diversas “n”, y para varias “p”. Busca en internet una tabla de distribución binomial, y con ella en mano resuelve el siguiente ejercicio.

Distribución de Probabilidad Binomial. Ejercicio 2.

Se sabe que en Estados Unidos, 7 de cada 10 personas que contratan un seguro para mascotas, son mujeres. Encuentra la probabilidad de que, al elegir aleatoriamente 11 propietarios con mascotas aseguradas, 8 de ellos sean mujeres.

<u>Distribución de Poisson</u>.- La distribución Poisson, se caracteriza por lo siguiente:

- Los eventos son independientes, es decir que la ocurrencia de un evento en un intervalo (espacio o tiempo) no afecta la probabilidad de ocurrencia de un segundo evento en el mismo intervalo o en otro intervalo.
- En teoría, la ocurrencia de un evento es posible en infinitas ocasiones dentro del intervalo.

- La probabilidad de una sola ocurrencia del evento en un intervalo dado tiene una relación proporcional con el tamaño o dimensión de dicho intervalo.
- En fracciones infinitesimales del intervalo, la probabilidad de más de una ocurrencia del evento es insignificante.
- El descriptor que define la forma de la curva, para cada caso específico, es “**λ**“ (lambda).

Esta distribución nos da una aproximación de la probabilidad de ocurrencia de procesos con eventos más o menos raros, por ejemplo accidentes o errores de manufactura, los cuales son medidos en intervalos de tiempo o espacio. Su algoritmo matemático es:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

Donde, X = número de ocurrencias de un evento en un intervalo de espacio o tiempo

λ = número promedio de ocurrencias del evento aleatorio dentro del intervalo

e = 2.7183 (número de Euler)

Parecería que esta es una distribución de aplicación complicada, pero en cuanto revisemos un ejemplo verás que no es tanto así.

Ejercicio 1. Se sabe que en una colonia de una ciudad falla el servicio de electricidad (se va la luz) en promedio 3 veces cada 4 semanas. Calcula la probabilidad de que **no** haya más de una falla durante una semana en particular.

Nuevamente, lo primero que hacemos es identificar la información disponible,

X = que falle 0 veces **o** que falle 1 vez; no más veces

λ = 3 veces cada 4 semanas, que es igual a ¾ en una semana = 0.75

e = 2.7183

Luego, sustituimos, simplificamos y resolvemos según la fórmula,

$$P(X_{\text{cero fallas}} \text{ o } X_{\text{una falla}}) = P(X_{\text{cero fallas}}) + P(X_{\text{una falla}})$$

$$P(X_{\text{cero fallas}} \text{ o } X_{\text{una falla}}) = \frac{(2.7183^{-0.75}) * 0.75^0)}{0!} + \frac{(2.7183^{-0.75}) * 0.75^1)}{1!}$$

$$P(X_{\text{cero fallas}} \text{ o } X_{\text{una falla}}) = \frac{0.4724 * 1}{1} + \frac{0.4724 * 0.75}{1}$$

$$P(X_{\text{cero fallas}} \text{ o } X_{\text{una falla}}) = 0.4724 * 0.3543 = 0.8267$$

Y la respuesta a nuestro ejercicio es que, la probabilidad de que la luz no falle más de una vez en una semana, es de **0.8267**

Igual que sucede con la distribución binomial, también para la de Poisson existen tablas que facilitan la obtención de probabilidades, en este caso, para diferentes "X" y varios "λ".

Para el segundo ejercicio, que se plantea aquí abajo, **primero** revisa este video,

Estadística e Investigación de Operaciones. (2 de abril de 2014). *Poisson*. [Archivo de video]. https://www.youtube.com/watch?v=JvtGQfaZSG4

Luego, ubica en internet una tabla de distribución de Poisson para resolver el ejercicio,

Distribución de Probabilidad de Poisson. Ejercicio 2

En un hospital, en el periodo de vacaciones, llegan en promedio **6** accidentados **por hora**. Calcula la probabilidad de que, en estas vacaciones, en una **1.5 horas** lleguen,

a) Justo 7 accidentados **b)** 5 o menos accidentados **c)** Más de 5 accidentados

Y al final, revisa tus resultados con una calculadora de probabilidades Poisson en línea:

EasyCalculation.com. (s/f). *Calculadora de distribución de Poisson*. https://www.easycalculation.com/es/statistics/poisson-distribution.php

1.2.3. Distribuciones de variables continuas

Así como existen distribuciones de probabilidad para variables aleatorias discretas, también existen modelos para la distribución de probabilidad de variables aleatorias continuas.

Recurramos nuevamente a Daniel (2002) para recordar lo que es una variable continua:

> **"… es aquella que puede asumir cualquier valor en un intervalo específico de valores. Consecuentemente, entre cualesquiera dos valores asumidos por la variable continua existe un número infinito de valores"**.

La diferencia entre variable discreta y variable continua es la razón por la cual en muchas fuentes de consulta se identifica a las variables continuas con "mediciones" y a las variables discretas con "conteos".

Pero además, la diferencia entre discreto y continuo, tiene implicaciones más importantes cuando se trata de las distribuciones de probabilidad.

Veamos los siguientes puntos de comparación:

Tabla 6. Comparación entre las características de una distribución de probabilidad de variable discreta y una distribución de probabilidad de variable continua.

Distribución de Probabilidad de Variable Aleatoria Discreta	Distribución de Probabilidad de Variable Aleatoria Continua
Es posible contar puntualmente todos los posibles valores (aun siendo muchos) que toma la variable	Es imposible contar todos los posibles valores de la variable ya que entre dos valores cualesquiera siempre habrá infinidad de valores intermedios
Es posible determinar la probabilidad para cada valor puntual tomado por la variable	Es imposible determinar una probabilidad para un valor puntual tomado por la variable. Por definición, la probabilidad de un evento puntual de variable continua, es igual a cero
Es opcional calcular las probabilidades por medio de intervalos	El cálculo de probabilidades se hace sólo por intervalos; esto por las dos razones anteriores

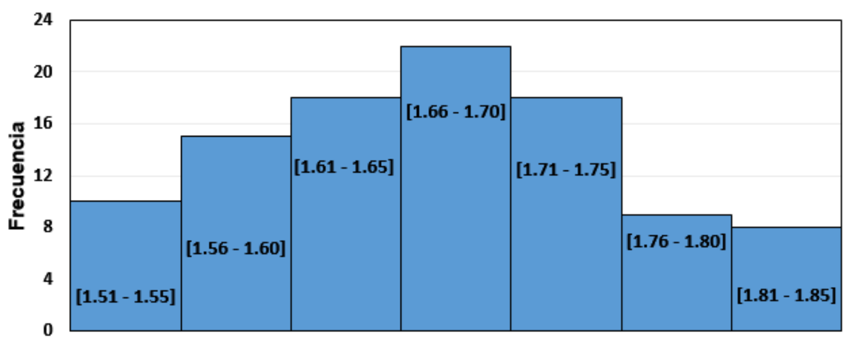
A la distribución de probabilidad de variable discreta se le llama Función de Masa de Probabilidad FMP	A la distribución de probabilidad de una variable continua se le denomina Función de Densidad de Probabilidad FMP
Para calcular probabilidades se opera con valores específicos de probabilidad asociados a valores puntuales de la variable P(X=x)	Para calcular probabilidades se opera una integral que define la probabilidad de que x se halle entre los límites de un intervalo P(a<X<b) $$\int_a^b f(x)dx$$
NOTA: P(X), que se lee como “probabilidad de X”, y f(x), que se lee como “función de x”, no son lo mismo, pero en este contexto pueden verse como expresiones análogas. f(x) hace referencia general a la relación que hay entre ambos lados de la igualdad	

Ahora tratemos de ilustrar las particularidades de una distribución de variable continua a través de un ejemplo con gráficos. Imaginemos que con una investigación obtuvimos una serie de datos de estatura de personas, los cuales organizamos y graficamos en intervalos de clase; en este caso tenemos inicialmente 7 intervalos que agrupan los datos de 100 individuos medidos, lo cual se muestra en el inciso A de la figura 9.

Pero, y si pudiéramos medir muchos individuos más y pudiéramos medirlos con instrumentos más precisos, entonces, ¿podríamos obtener probabilidades puntuales para valores puntuales? Pues la verdad es que no: tal como se mencionó en la tabla 6, para cada punto que elijamos, dicho punto siempre podrá ser dividido en infinidad de puntos, lo cual simplemente los convertiría en una serie de intervalos más angostos y numerosos, como se observa en el inciso B de la figura 9.

A)

	%
[1.51 - 1.55]	10
[1.56 - 1.60]	15
[1.61 - 1.65]	18
[1.66 - 1.70]	22
[1.71 - 1.75]	18
[1.76 - 1.80]	9
[1.81 - 1.85]	8



		%
[1.511 - 1.515]	1	0.058
[1.516 - 1.520]	3	0.175
[1.521 - 1.525]	4	0.233
[1.526 - 1.530]	5	0.291
[1.531 - 1.535]	9	0.524
[1.536 - 1.540]	11	0.641
[1.541 - 1.545]	10	0.583
[1.546 - 1.550]	13	0.758
[1.551 - 1.555]	13	0.758
....		
[1.816 - 1.820]	8	0.466
[1.821 - 1.825]	9	0.524
[1.826 - 1.830]	7	0.408
[1.831 - 1.835]	8	0.466
[1.836 - 1.840]	3	0.175
[1.841 - 1.845]	2	0.117
[1.846 - 1.850]	1	0.058
	1716	

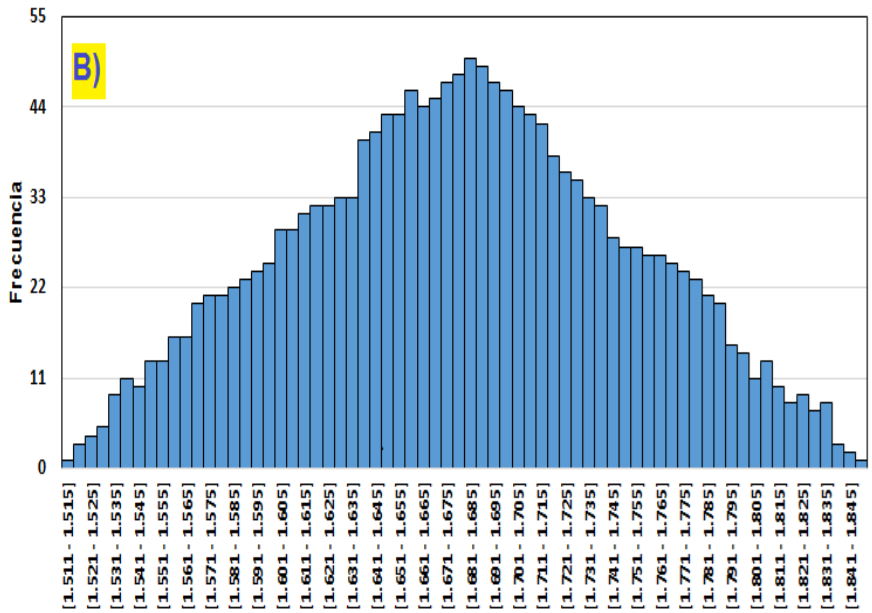
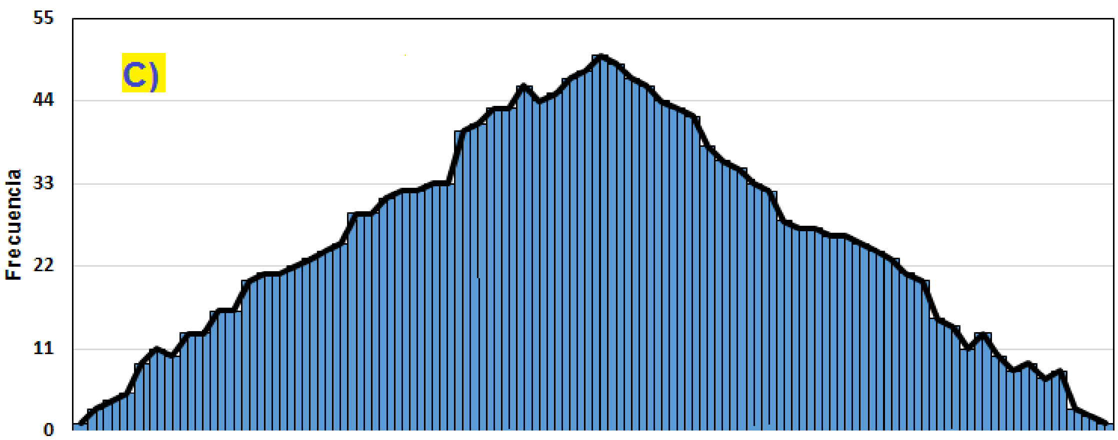


Figura 9. Histogramas para ilustrar las características de la distribución de probabilidad de una variable continua (ver texto).

Y si continuáramos en este intento, lo que sí sucedería es que, dibujando el polígono de frecuencias correspondiente, conseguiríamos un contorno suavizado y prácticamente curvilíneo, tal como se muestra en los incisos C y D de la figura 10.



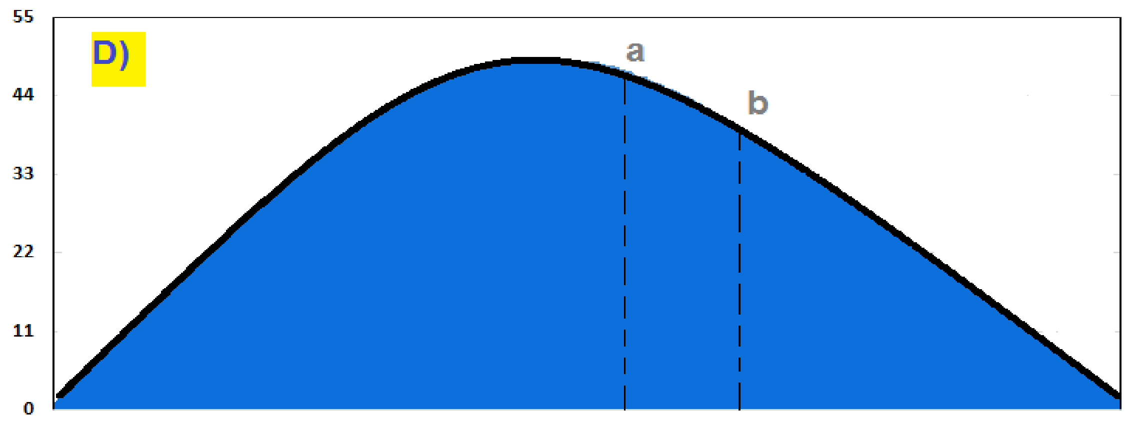


Figura 10. Histogramas y Polígonos de frecuencia. Ejemplo de Distribución de probabilidad de una variable continua (ver texto).

Recordemos que en los gráficos de barras para las distribuciones de variables discretas (como los de las gráficas de las figuras 5 y 6), cada barra representa la probabilidad de cada evento, y notemos el contraste que hay cuando tratamos con una variable continua: en el caso de la variable continua para calcular una probabilidad debemos referirnos a “intervalos” y a “áreas bajo la curva” dentro de esos intervalos (inciso D, figura 10). Y es por esta razón que se usan integrales para calcular probabilidades de ocurrencia de eventos de variables continuas.

Con las comparaciones que hemos señalado ya debemos tener claras las diferencias que hay entre los modelos de distribución de probabilidad de variables discretas y de variables continuas. Para una revisión de los diversos tipos de modelos teóricos de distribución de probabilidad y de sus aplicaciones, puedes consultar el siguiente recurso:

Servizo Galego de Saúde. (2014). *Distribuciones de Probabilidad. Epidat 4: Ayuda de Distribuciones de probabilidad. Octubre 2014*. https://www.sergas.es/Saude-publica/Documents/1899/Ayuda_Epidat_4_Distribuciones_de_probabilidad_Octubre2014.pdf

En el párrafo anterior dijimos que solo mencionaremos distintos modelos de distribución de variable continua, y esto es porque en este apartado realmente nos enfocaremos en la distribución normal, que es algo así como “la madre de todas las distribuciones” por su importancia teórica y de aplicación.

Distribución Normal. - Los rasgos distintivos de la distribución normal (figura 11) son:

- Tiene forma de campana y es simétrica en relación a su media
- La media, la mediana y la moda son iguales
- El área total bajo la curva es igual a 1 (100%), con 50% del área a la derecha de la media, y 50% del área a la izquierda de la media
- Si trazamos líneas perpendiculares al eje "x", una a la izquierda y una a la derecha de la media, a una distancia de una desviación estándar, el área delimitada por la curva, el eje "x" y las perpendiculares, equivale aproximadamente al 68.3% del área total
- Si las perpendiculares (del punto anterior) se colocan a una distancia de dos desviaciones estándar, el área equivale al 95.5% del área total
- Si las mismas perpendiculares se colocan a una distancia de tres desviaciones estándar, el área equivale al 99.7% del área total
- Los descriptores que define la forma de la curva, para cada caso, son **μ** y **σ**.
- El algoritmo matemático que le describe es,

$$\int(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Donde: **e** = 2.7183 (número de Euler)

π = pi = 3.1416 (constante de relación entre circunferencia y radio de un círculo)

μ = Media

σ = Desviación estándar

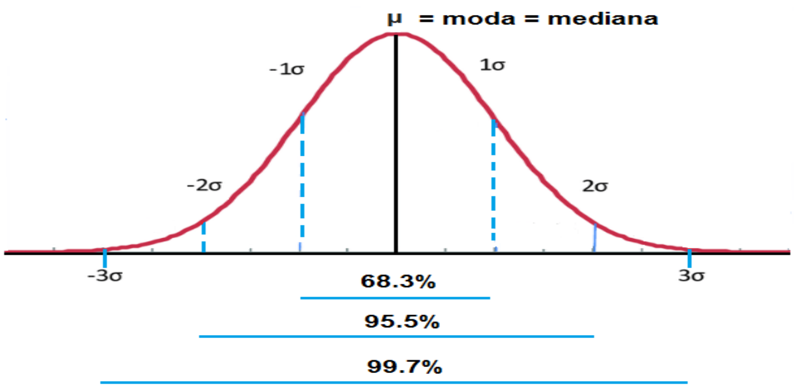


Figura 11. Gráfico que ilustra las características principales de una Distribución Normal

Y **¿por qué es tan importante el modelo de distribución normal?**

Pues la **razón fundamental** de su relevancia es que **muchas y muy diversas variables que nos interesa investigar, siguen o se aproximan a una distribución de probabilidad de tipo normal**; por lo tanto su aplicación es de amplio espectro además de ser bastante sencilla.

Y ya que mencionamos que el modelo de la distribución normal es de sencilla aplicación, debemos mencionar que la razón principal de su sencillez es que existe una versión "estandarizada" de esta distribución.

Distribución Normal Estándar-. Una distribución normal estándar es simplemente una distribución normal cuya media es igual a cero (μ=0), y cuya desviación estándar es igual a 1 (σ=1). Esta estandarización se obtiene redefiniendo la ecuación original de este modo:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Y definiendo la variable aleatoria "**Z**" con esta fórmula: **Z = (x-μ)/σ**

Observemos que Z nos está diciendo a cuántas desviaciones estándar de distancia se halla el valor buscado con respecto a la media, ya sea a la derecha (Z positiva) o a la izquierda (Z negativa).

Como consecuencia de esta estandarización, cuando buscamos calcular una **f(X)** debemos convertir **x** a **Z** y trabajar con alguna de las tablas de dicha variable **Z.**

Y aquí debemos tener mucho cuidado en saber qué tipo de tabla estamos usando, ya que las tablas pueden ser:

- **Del lado derecho de la media**
- **Del lado izquierdo de la media**
- **El acumulado desde la izquierda de la media hasta la derecha de la media**

Ahora, vayamos directamente a algunos ejercicios.

Ejercicio 1. Encuentra la probabilidad de que **Z** se ubique entre -∞ y 1.80

R- En este caso no hay nada que transformar, pues la pregunta es muy sencilla y directa.

Primero ubicamos una tabla de **Z**, por ejemplo la de la primera hoja de este link:

Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro. (s/f). *Tablas.xls*.
http://www.uaaan.mx/~jmelbos/tablas/tabest.pdf

Luego buscamos el 1.8 en la primera columna hacia abajo y el cero en la primera fila, (para así formar el 1.80 que necesitamos) y en donde se cruzan estas coordenadas, ese es nuestro número buscado en esta tabla (figura 12).

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857

Figura 12. Uso de una tabla de Z para el primer ejercicio de Distribución Normal Estándar.

Pero, ¡un momento!... Por el tipo de tabla que usamos, en realidad solo tenemos el área del lado derecho de la media y la pregunta pide desde **-∞,** lo cual implica que debemos también tomar en cuenta el lado izquierdo de la media. Entonces, como sabemos que la distribución es simétrica y que tiene 50% del área a cada lado de la media, pues solo debemos sumar 0.5 (50%) a la probabilidad encontrada en la tabla,

$$0.4641 + 0.50 = \mathbf{0.9641}$$

Y ¡ya está! La probabilidad de que Z se halle entre - ∞ y 1.80, es 0.9641

Para el segundo ejercicio, planteemos un problema con un algo más de contexto,

Ejercicio 2. Se aplicaron pruebas de conocimientos básicos en matemáticas en una escuela primaria, obteniéndose una media de 63 y una desviación estándar de 17. El mínimo aprobatorio fue 60 de 100 reactivos. Se asume que la variable "calificación" sigue una distribución aproximadamente normal. Con estos datos, determina:

a) El porcentaje de los estudiantes que obtendrían una calificación entre 80 y 95.
b) El porcentaje de aprobados con 70 o más de calificación
c) La probabilidad de que al elegir un alumno al azar este haya reprobado

Respuesta inciso a) (figura 13),

Buscamos la probabilidad de 80≤Calificación≥95, que al aplicar la fórmula **$Z = (x-\mu)/\sigma$** es lo mismo que decir que buscamos la probabilidad de,

$$[(80 - 63) / 17] \leq Z \geq [(95 - 63) / 17]$$

Entonces, resolvemos las operaciones y definimos el intervalo buscado

$$1.00 \leq Z \geq 1.88$$

Luego, con la misma tabla, ubicamos la probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta 1.88,

$$0.4699 + 0.5 = 0.9699$$

Continuamos y ubicamos la probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta 1.00,

$$0.3413 + 0.5 = 0.8413$$

Restamos la segunda probabilidad obtenida a la primera probabilidad obtenida,

$$0.9699 – 0.8413 = 0.1286$$

Y la respuesta es, que se puede esperar que solo el 12.86% de los alumnos obtenga una calificación entre 80 y 95

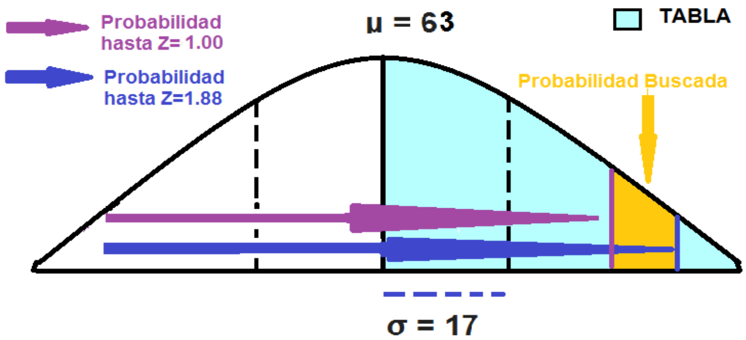


Figura 13. Esquema para la solución parcial del ejercicio 2 de la Distribución Normal Estándar. (Nota: La proporción entre áreas no es real).

Ahora es tu turno de resolver los incisos b y c de este mismo ejercicio (Ejercicio 2 de la distribución normal estándar).

1.3. Distribuciones muestrales

Para iniciar esta sección, retomemos algunos conceptos que hemos abordado y que ya deben estar claros:

1. Las características y la forma (gráfica) de una distribución de probabilidad dependen del tipo y comportamiento de la variable que se esté estudiando.
2. La gran importancia que tiene la distribución normal radica en que "… muchas y muy diversas variables que nos interesa investigar, siguen o se aproximan a una distribución de probabilidad".

Notemos también que hasta ahora hemos usado la probabilidad y las distribuciones de probabilidad desde una perspectiva general:

- Sin mencionar o especificar si los datos provienen de una población o una muestra, y
- Para suponer o aproximar la probabilidad de ocurrencia de un evento de cualquier variable (por ejemplo: resultados al lanzar monedas o dados, número de accidentados en un periodo de tiempo y calificaciones en un examen)

Y con relación a este último punto, debemos señalar que, si bien existen muchísimas variables que pueden ser de interés para cada investigador según su área de estudio, **existe un grupo de variables de particular interés para casi todos los investigadores, y estas variables son las relacionadas con los estadísticos muestrales** (aquí debes recordar la diferencia entre parámetro y estadístico).

Aunque se puede usar una distribución de probabilidad para casi cualquier estadístico muestral, los estadísticos de uso más común son:

- ✓ la media muestral
- ✓ la diferencia entre medias de dos muestras
- ✓ la proporción muestral
- ✓ la diferencia entre las proporciones de dos muestras

Y justo a partir de aquí vamos empezar a abordar de lleno la inferencia estadística, ya que, estudiar y analizar el comportamiento de los estadísticos muestrales es lo que nos permitirá hacer suposiciones probabilísticas sobre parámetros poblacionales.

1.3.1. ¿Qué son las distribuciones muestrales?

Resulta conveniente, para empezar, especificar la definición de distribución muestral que nos da Daniel (2002):

> **La distribución de todos los valores posibles que puede asumir [**un**]a estadística**[o]**, calculados a partir de muestras del mismo tamaño, seleccionadas aleatoriamente de la misma población, se llama distribución muestral de esa**[e] **estadística**[o]**.**

Y la manera de elaborar una distribución muestral es como sigue (Daniel, 2002):

- **A.** De una población de estudio, que sea finita y de tamaño N, se toman aleatoriamente todas las muestras posibles de tamaño n.
- **B.** Para cada una de las muestras obtenidas, se calcula el estadístico de interés.
- **C.** Se organizan los valores en dos columnas, una con los distintos valores observados del estadístico y otra con las frecuencias de ocurrencia de dichos valores.

Pero, nuevamente preguntémonos, **¿por qué son tan importantes las distribuciones muestrales de probabilidad?** Pues describámoslo de este modo:

Así como las distribuciones teóricas sirven como referencia para calcular lo que puede suceder en la realidad con una variable cualquiera, así la distribución de probabilidad de un estadístico muestral nos acercará a estimar correctamente lo que sucede en realidad con los parámetros de toda la población de estudio.

Dicho de otro modo, si yo conozco, por ejemplo, la distribución de probabilidad del **promedio** muestral de un variable cualquiera, podré suponer más certeramente lo que pasa con el promedio poblacional – porque mi estadístico (muestra) será muy probablemente más cercano al parámetro (población). Esto funciona para los promedios, las proporciones, las varianzas, y cualquier otros estadístico muestral.

Y recordemos que **la inferencia estadística se hace precisamente para generalizar o extrapolar conclusiones asumiendo que, lo que pasa en la muestra, también pasa en la población de estudio**.

Entonces, para ilustrar lo que es una distribución muestral, sus características y su utilidad, revisa el siguiente subtema.

1.3.2. Distribución de la media de la muestra

Como ya se mencionó, la media es uno de los estadísticos más usados dentro del tema de las distribuciones muestrales, por ello iniciamos con esta distribución muestral:

Supongamos que tenemos una población de 5 personas para la cual queremos conocer el peso medio corporal; y supongamos que por alguna razón no podemos tener acceso a toda la población, y por ello “no sabemos” que los pesos de esos 5 individuos son 61, 63. 65, 67 y 69 kilos.

Por lo anterior, queremos obtener una aproximación de esa media poblacional por medio del proceso de muestreo. Para lograr lo planteado, nos apoyaremos en la distribución de probabilidad de la media muestral. Entonces procedemos a tomar muestras para elaborar dicha distribución, y decidimos muestrear (con reemplazo) 4 muestras de tamaño dos.

Los resultados de estas 4 muestras se observan en el inciso A de la figura 14, en la cual se especifican los pesos medidos, y entre paréntesis la media correspondiente.

Luego elaboramos la tabla de frecuencias y el gráfico de la distribución de probabilidad, los cuales se observan en los incisos B y C de la figura 14.

A

61,65 **(63)**	63,65 **(64)**
61,67 **(64)**	63,67 **(65)**

B

Media	Frec
63	1
64	2
65	1

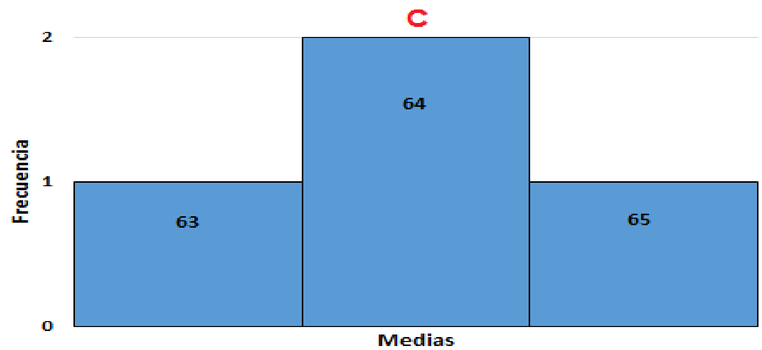


Figura 14. Imagen de tablas y gráfico. Primer ejemplo del tema Distribución de la Media de la Muestra. Solo 4 muestras.

Y finalmente en este procedimiento, obtenemos un promedio de las medias obtenidas:

$$(63 + 64 + 64 + 65) / 4 = 64$$

Bueno, pues ahora supongamos que en vez solo extraer 4 muestras, pudimos extraer 25 muestras con las 25 posibles combinaciones de pares de individuos (inciso A de la figura 15). Y hagamos el mismo procedimiento para obtener la tabla y el gráfico correspondientes (incisos B y C de la figura 15).

A

61,61 (61)	63,61 (62)	65,61 (63)	67,61 (64)	69,61 (65)
61,63 (62)	63,63 (63)	65,63 (64)	67,63 (65)	69,63 (66)
61,65 (63)	63,65 (64)	65,65 (65)	67,65 (66)	69,65 (67)
61,67 (64)	63,67 (65)	65,67 (66)	67,67 (67)	69,67 (68)
61,69 (65)	63,69 (66)	65,69 (67)	67,69 (68)	69,69 (69)

B

Media	Frec
61	1
62	2
63	3
64	4
65	5
66	4
67	3
68	2
69	1

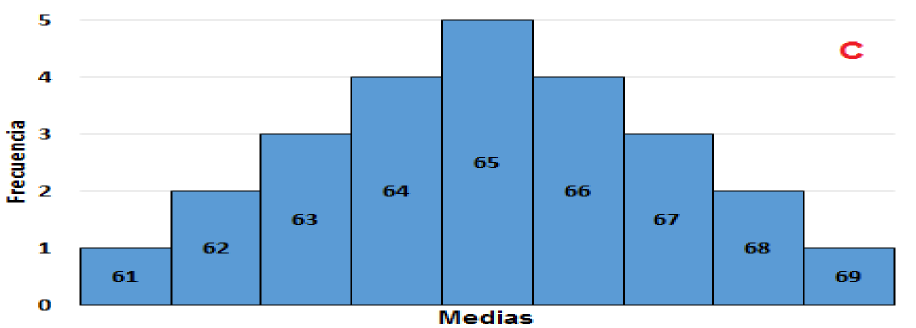


Figura 15. Tablas y gráfico. Primer ejemplo del tema Distribución de la Media de la Muestra. Todas las muestras posibles

Y nuevamente terminemos este proceso con el cálculo de la media de medias:

$$\frac{61+62+62+63+63+63+64+64+64+64+65+65+65+65+65+66+66+66+66+67+67+67+68+68+69}{25}=65$$

Para terminar estos procedimientos análogos, calculemos el verdadero promedio de los datos de peso, usando a todos los individuos: **(61 + 63 + 65 + 67 + 69) / 5 = 65**

Ahora compara las figuras 14 y 15, compara todos los promedios calculados, y reflexiona sobre ¿qué es lo que observas de diferente o de semejante?

¿Ya lo notaste? ¡Exacto! El promedio de promedios que calculaste con todas las muestras posibles fue el que resultó ser el verdadero promedio de los pesos de todos los individuos; pero, el promedio de promedios de solo 4 muestras, solo se acercó a la realidad poblacional.

A partir de lo revisado con este ejemplo, podemos señalar algunos puntos importantes:

- La media muestral, como cualquier variable, tiene su propia distribución, la cual no necesariamente coincide con la distribución de la variable que está promediando. En nuestro ejemplo es muy claro que la variable “peso“ se distribuye uniformemente en la población (5 individuos, cada uno con un peso diferente y cada uno con la misma probabilidad de ser elegido = 1/5), mientras que la variable “media muestral” parece asemejarse a distribución normal (figuras 14 C y 15 C)
- La distribución de probabilidad de medias muestrales, como cualquier otra distribución, tiene sus descriptores:

Media de la distribución de medias	$\mu_{\bar{x}} = \dfrac{(\Sigma\, \bar{X})}{N^n}$
Varianza de la distribución de medias	$\sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\Sigma\,(\bar{X}_i - \mu_{\bar{x}})^2}{N^n}$
Desviación Estándar de la distribución de medias; se denomina Error Estándar	$\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

- Nuestro ejemplo ilustra claramente el llamado “**Teorema del Límite Central**” (TLC) el cual dice que si se estudia una población con media μ y desviación estándar σ y se toman (con reemplazo) muestras aleatorias suficientemente grandes (generalmente n > 30), entonces la distribución de las medias muestrales se distribuirá aproximadamente de manera normal.

Este último punto es de gran trascendencia en el campo de la inferencia estadística ya que significa que,

Satisfaciendo las condiciones requeridas, podemos usar el modelo de distribución de probabilidad normal para cuantificar la incertidumbre al hacer inferencias sobre un estadístico poblacional cualquiera, basándonos en el estadístico de la muestra.

Ahora hagamos un ejercicio usando esta distribución para calcular probabilidades, tal como lo hemos hecho con distribuciones anteriores.

Ejercicio 1. Sabemos que la concentración de un contaminante en la sangre de cierta especie de crustáceo, presenta una media de 150 y una desviación estándar de 16 microgramos por litro. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria de 60 de esos crustáceos, dicha muestra registre una concentración media entre 135 y 145 microgramos por litro?

Respuesta. Primero, notamos que no se menciona el tipo de comportamiento probabilístico (distribución) que presenta la variable “concentración de contaminante en sangre”. Pero aun suponiendo que ese comportamiento no sea el de una distribución normal, el hecho de tomar una muestra suficientemente grande (60>30) nos permite aplicar el concepto del “**Teorema del Límite Central**” (TLC) y suponer que la media de la muestra obtenida se comporta aproximadamente conforme a la distribución normal. Por lo anterior, procedemos de modo **casi** igual a lo realizado en los ejercicios de la distribución normal estándar:

La probabilidad buscada es la del intervalo $135 \leq x \leq 145$, por lo tanto debemos convertir las “X”s a “Z”s, usando nuestra fórmula **$Z = (x-\mu)/\sigma$**, pero **ajustándola de acuerdo a los descriptores de esta distribución**,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Entonces, con este ajuste el intervalo buscado es,

$$[(145-150) / (16/60^{1/2})] \leq Z \geq [(135-150) / (16/60^{1/2})]$$

Resolvemos las operaciones y definimos el intervalo buscado,

$$(-5) / (16/7.745) \leq Z \geq (5) / 16/7.745)$$

$$-5 / 2.066 \leq Z \geq 5 / 2.066$$

$$-2.4201 \leq Z \geq 2.4201$$

Con este intervalo de Z definido, y con el uso de alguna tabla de Z acumulada, podemos calcular la probabilidad como sigue,

La probabilidad desde menos infinito hasta **Z=2.42 es de 0.9922**

La probabilidad desde menos infinito hasta **Z=-2.42 es de 0.0022**

Por lo cual, la probabilidad de que el promedio de nuestra muestra se halle entre 145 y 155 microgramos por litro, es de

0.9922 - 0.0022 = 0.99

Para ejercitar el uso de esta distribución, realiza por tu cuenta el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2 de la sección 1.3.2. Un estudio reportó que los niveles de colesterol de 180 varones con edades entre 20 y 24 años, presentó una media de 211 y una desviación estándar de 43. Si se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 60, calcule la probabilidad de que el nivel de colesterol de la media de la muestra se encuentre,

a) Entre 170 y 195 **b)** Abajo de 175 **c)** Arriba de 190

1.3.3. Distribución de la diferencia entre las medias de dos muestras

En muchas investigaciones o estudios, se busca averiguar algo sobre la diferencia entre las medias de dos poblaciones. En una investigación dada, el investigador tal vez quiera saber si es factible suponer que dos medias poblacionales son diferentes. En otra situación, es posible que el investigador quiera conocer la magnitud de la diferencia entre dos medias. Por ejemplo, a un investigador le puede interesar saber qué tan diferentes son los niveles de estrés, entre los oficinistas y los obreros de alguna empresa. Es en este caso se usa la distribución muestral de la diferencia de medias de dos muestras.

La construcción de esta distribución de probabilidad, aunque sigue las mismas reglas generales, se hace algo laboriosa pues además de calcular las medias de las medias muestrales de cada población (población oficinistas y población obreros, en nuestro ejemplo), también hay que tabular las diferencias entre las medias muestrales. Pero afortunadamente, no es indispensable estar elaborando estas tablas, sino que es suficiente tomar siempre una muestra grande y conocer la fórmula que nos transforma a "**Z**" la variable estudiada. Para este caso la fórmula es la siguiente:

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Donde: $\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2$ = Diferencia investigada para las media

μ_1 - μ_2 = Diferencia entre las medias poblacionales (conocidas)

σ_1 = Desviación estándar de la población 1

σ_2 = Desviación estándar dela población 2

n_1 = muestra de la población 1

n_2 = muestra de la población 2

$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ = Error estándar de la distribución muestral (diferencia de medias)

Ahora, hagamos un ejemplo de aplicación de esta distribución,

Ejercicio 1. Se ha establecido que para cierto consultorio médico el tiempo promedio de atención es de 45 minutos, con una desviación estándar de 15 minutos, mientras que para un segundo consultorio, el promedio en el tiempo de atención es de 30 minutos, con una desviación estándar de 20 minutos. Si se registra al azar el tiempo de atención de 35 consultas en el primer consultorio y 40 en el segundo ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de atención en consulta difiera entre los consultorios por 20 minutos o más?

Respuesta. Nuevamente en el planteamiento del problema no se menciona qué tipo de distribución presenta la variable "tiempo de atención en consultorio", pero, puesto que las muestras tomadas para cada consultorio son de 30 consultas o más, podemos aplicar el TLC. Entonces, primero veamos los datos que tenemos

$\bar{X}_1$ - $\bar{X}_2$ = 20 o más, que es lo mismo que decir que buscamos la probabilidad de

$$1 - (-\infty \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \leq 20)$$

ó

$$1 - (-\infty \leq Z \leq \text{por definir})$$

$\mu_1 - \mu_2 = 45 - 30 = 15$

$\sigma_1 = 15$; $\sigma_2 = 20$; $n_1 = 35$; $n_2 = 40$

Sustituimos en la fórmula y resolvemos las operaciones,

$$\frac{20 - 15}{\sqrt{\frac{15^2}{35} + \frac{20^2}{40}}} = 1.234$$

Con el valor obtenido (Z=1.234), ahora solo buscamos en alguna tabla de Z la probabilidad que corresponde a 1 – Z (figura 16),

1 – 0.8907 = 0.1093

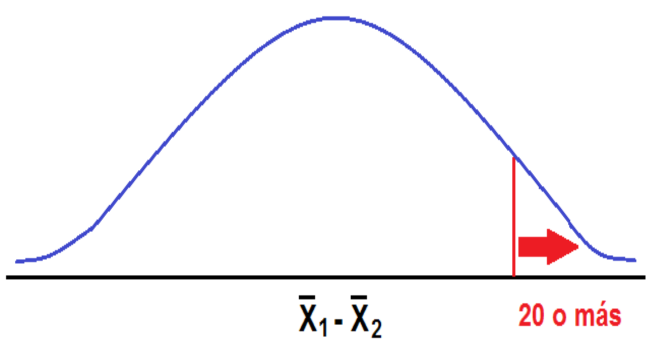


Figura 16. Gráfico que ilustra el área bajo la curva que da respuesta al ejercicio 1 de la sección 1.3.3. Distribución de la Diferencia entra las Medias de Dos Muestras

Ahora, con este mismo tipo de procedimiento, resuelve el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2 de la sección 1.3.3. En una escuela primaria, con cierta incidencia de obesidad, se sabe que la población de las niñas del sexto año presenta un peso promedio de 85 libras, con una desviación estándar de 12.247 libras, mientras que la población de niños del mismo grado, registran un peso promedio de 100 libras y una desviación estándar de 14.142. Se tienen buenos indicios de que la variable peso presenta una distribución normal en ambas poblaciones. Si se toman al azar, una muestra de 20 niños y una muestra de 25 niñas, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de los 20 niños sea al menos 20 libras más grande que el de las 25 niñas?

Datos:

μ_1 = 100 libras ; μ_2 = 85 libras; σ_1 = 14.142; σ_2 = 12.247 ; n_1 = 20 niños ; n_2 = 25 niñas

1.3.4. Distribución de la proporción de la muestra

Otro de los estadísticos que frecuentemente son usados por los investigadores es la proporción de una muestra. Esto puede sonarte como algo nuevo, pero en realidad la proporción es un tema de interés muy general en prácticamente todas las áreas de investigación.

Algún investigador puede necesitar usar una proporción en lugar de una media, para calcular por ejemplo ¿qué probabilidad hay de que un lote de algún producto contenga tal o cual porcentaje de productos defectuosos? O ¿cuál es la probabilidad de que una enfermedad afecte gran parte de la población de alguna localidad? Para esto casos se usa como punto de partida a la distribución de la proporción de la muestra.

Esta distribución, tal como sucede con los casos anteriores de esta sección, se puede construir empíricamente con una tabla de frecuencias, en la que se estarían tabulando las frecuencias de las proporciones muestrales que presenta nuestro evento buscado de una variable dada. Por ejemplo, la variable podría ser “Mal de Párkinson”, cuyos eventos serían enfermo o no enfermo de mal de Parkinson, y para cada muestra estaríamos registrando la proporción de enfermos (éxito).

La fórmula de Z para este caso es la siguiente:

$$Z = \frac{p - P}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}}$$

Donde: **p** = proporción cuya probabilidad se busca

P = Proporción de la población (conocida)

n = tamaño de muestra

Para este estadístico también es posible aplicar el TLC, siempre y cuando se cumplan los siguientes requisitos:

$$n * P > 5$$

y

$$n * (1-P) > 5$$

Con esta información ya podemos ejemplificar la aplicación de esta distribución en el cálculo de una probabilidad:

Ejercicio 1. Se sabe que en una población de perros de raza Pointer los individuos presentan displasia de cadera en una proporción de 0.08. Si se eligen aleatoriamente 150 individuos de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de perros con displasia en la muestra sea igual o mayor que 0.15?

Respuesta. Revisemos primero nuestros datos,

p = 0.15 (proporción para la cual se busca la probabilidad)

P = 0.08 (proporción de la población con displasia)

1 – P = 1 - 0.08 (proporción sin displasia; esta es la “q”, ¿recuerdas?)

n = 150 (tamaño de la muestra)

Con estos datos podemos darnos cuenta de que,

$$n * P = 150 * 0.08 = 12 > 5$$

y

$$n * (1 - P) = 150 * (1 - 0.08) = 138 > 5$$

Por lo tanto el TLC es aplicable, así es que procedemos a la conversión a Z,

$$Z = \frac{0.15 - 0.08}{\sqrt{\frac{0.08\,(1 - 0.08)}{150}}} = 3.15$$

Haciendo las operaciones algebraicas obtenemos una Z de 3.15, la cual, a través de la consulta de alguna tabla de Z, nos **resulta** en que **la probabilidad de que en una muestra de 150 perros de esa población de Pointers, el 15% tengan displasia, es igual a 1 - 0.9992 = 0.0008**

Ahora práctica el uso de esta distribución muestral con el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2 de la sección 1.3.4. Se sabe que 35 por ciento de los miembros de una población sufren de enfermedades crónicas ¿Cuál es la probabilidad de que en una muestra aleatoria de 200 individuos, 80 o más de ellos tengan al menos una enfermedad crónica?

1.3.5. Distribución de la diferencia entre las proporciones de dos muestras

La última de las distribuciones muestrales que revisaremos es la que se construye tomando como variable a la diferencia entre dos proporciones de dos muestras de dos poblaciones distintas. Esta distribución es más o menos análoga a la que trabaja con la diferencia de medias, pero en este caso lo que interesa es la diferencia de proporciones.

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}}}$$

Donde: $\mathbf{p_1 - p_2}$ = Diferencia de proporciones cuya probabilidad se busca

$\mathbf{P_1 - P_2}$ = Diferencia de las proporciones de las poblaciones 1 y 2

$\mathbf{n_1}$ = tamaño de muestra de la población 1

$\mathbf{n_2}$ = tamaño de muestra de la población 2

Nuevamente, para este estadístico también es posible aplicar el TLC, siempre y cuando se cumplan los siguientes requisitos:

$$(n_1 * P_1) > 5$$

$$(n_2 * P_2) > 5$$

$$[n_1 * (1-P_1)] > 5$$

$$[n_2 * (1-P_2)] > 5$$

Con esta información, podemos ir directamente a un ejemplo de uso de esta distribución en el cálculo una probabilidad,

Ejercicio 1. Supón que la proporción de consumidores de cierta droga médica para uso recreativo, es de 0.50 para la población 1, mientras que para la población 2 la proporción es de 0.33 ¿Cuál es la probabilidad de que muestras de tamaño 100, obtenidas de cada una de las poblaciones, presenten una diferencia de proporción de 0, 30 o más?

Respuesta. Revisemos nuestros datos,

$p_1 – p_2 = 0.30$ (diferencia de proporciones para la cual se busca la probabilidad)

$P_1 – P_2 = 0.50 – 0.33$ (diferencia entre las proporciones de las poblaciones 1 y 2)

$n_1 = 100$ (tamaño de la muestra de la población 1)

$n_2 = 100$ (tamaño de muestra de la población 2)

Con estos datos podemos darnos cuenta de que,

$$(n_1 * P_1) = (100 * 0.5) = 50 > 5$$

$$(n_2 * P_2) = (100 * 0.33) = 33 > 5$$

$$[n_1 * (1-P_1)] = [100 * (1-0.5)] = 50 > 5$$

$$[n_2 * (1-P_2)] = [100 * (1-0.33)] = 67 > 5$$

Por lo anterior, podemos hacer uso del TLC, así es que procedemos a la conversión a Z,

$$Z = \frac{0.30 - 0.17}{\sqrt{0.00471}} = 0.189$$

La Z calculada equivale a una probabilidad de 0.9706. En consecuencia, la respuesta a este ejercicio es que **para muestras de 100 individuos de cada población, la probabilidad de que la diferencia de proporciones de consumidores de esa droga sea de 0.30 o más, es igual a 1 - 0.9706 = 0.0294**

Ahora solo te resta hacer por ti mismo este segundo ejercicio usando esta distribución de diferencia de proporciones:

Ejercicio 2 de la sección 1.3.5. En una población de adolescentes con discapacidad intelectual, se sabe que la proporción de los que son hiperactivos es de 0.40. Se extrajo una muestra aleatoria de tamaño 120 de esa población, y otra de tamaño 100 a partir de otra población de adolescentes con el mismo problema. Si la proporción de adolescentes hiperactivos es la misma en ambas poblaciones, ¿cuál es la probabilidad de que las proporciones muestrales resulten con una diferencia de 0.160 o más?

IMPORTANTE

Sobre algunos requerimientos que se deben cubrir para la aplicación de las distribuciones teóricas de probabilidad.

Como ya notaste, muchos de nuestros planteamientos y de nuestras fórmulas están aplicadas estableciendo como requisito previo que la muestra se obtiene,

- **con reemplazo o**
- **sin reemplazo, pero a partir de poblaciones de tamaño muy grande, o de poblaciones “infinitas”.**

La razón de estos requisitos es que, en poblaciones de estudio que son pequeñas, al extraer consecutivamente individuos para la(s) muestra(s), la población se va reduciendo y esto va modificando las probabilidades de todos los posibles eventos.

Estos requisitos no son difíciles de satisfacer en la mayoría de las situaciones de la realidad, pues las poblaciones de estudio suelen ser muy grandes (de hecho, por eso es que se usan muestras). Sin embargo, siempre debes estar alerta para revisar que se cumplan los supuestos de cada modelo, ya que, si no se cumplen, la mayoría de las fórmulas cambian.

También es importante que notes la importancia de trabajar con muestras grandes, pues estas posibilitan la aplicación del Teorema del Límite Central, el cual nos permite trabajar con la distribución normal estándar (Z).

Cierre de unidad

En esta unidad 1 hemos estudiado como temas iniciales el origen y los **tipos de probabilidad**, así como los **axiomas** y las **reglas** que le dan formalidad a la **teoría de la probabilidad**.

En esta parte hemos hecho énfasis en la importancia que tiene esta teoría **como base para la inferencia estadística** y hemos ido paso a paso en la aplicación de dichas reglas para conocer las distintas formas usadas para calcular la probabilidad de eventos simples, eventos no mutuamente excluyentes y eventos dependientes. Como punto importante de estos primeros temas, hemos procurado desarrollar tu poder de abstracción para manejar los conceptos "**inferencia**", "**probabilidad**", "**proporción**" y "**frecuencia relativa como aproximación de probabilidad**".

En el segundo tema abordamos lo concerniente al concepto de "distribuciones de probabilidad", tanto desde el punto de vista experimental como desde el punto de vista teórico. En estas secciones hemos señalado puntualmente la importante función que tienen las distribuciones teóricas como **modelos de referencia para estudiar y/o usar y/o ajustar el comportamiento de muy diversas variables aleatorias**, tanto discretas como continuas. En esta segunda parte también ejemplificamos y ejercitamos el cálculo de probabilidades a través de las distribuciones de probabilidad teóricas más usadas, particularmente, con la llamada **distribución normal y su forma estandarizada**.

Como tercer tema hemos establecido un panorama general sobre qué son, qué significan y para qué sirven las distribuciones muestrales. Hemos explicado la manera de ubicar las distribuciones muestrales, tanto en el contexto de las distribuciones probabilísticas, como en el contexto de la inferencia estadística. Y finalmente, hemos trabajado diversos ejercicios de aplicación simple de estas distribuciones muestrales que son las más usadas. Finalmente, hicimos un pequeño resumen sobre los requisitos teóricos que deben cubrirse para que la aplicación de las distribuciones de probabilidad sea la correcta.

Ahora continúa avanzando y revisa el contenido de la unidad 2.

Fuentes de consulta

Repaso Estadística Básica

Chávez, M. (31 de enero de 2018). *Mapa conceptual de la Estadística. Unadm*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=5CMIRlebNUs

Posada-Hernández, G. J. (2016). *Elementos Básicos de Estadística Descriptiva Para el Análisis de Datos*. Recuperado de http://www.funlam.edu.co/uploads/fondoeditorial/120_Ebook-elementos_basicos.pdf

Salinas, H. (2010). *Estadística: Conceptos Básicos y Definiciones*. http://www.mat.uda.cl/hsalinas/cursos/2010/eyp2/Clase1.pdf

Estadística Inferencial

Concepto.de. (2018). *Concepto de Probabilidad*. https://concepto.de/probabilidad/

Daniel, W. W. (2002). *Bioestadística. Base para el Análisis de las Ciencias de la Salud*. México: Limusa.

EasyCalculation.com. (2024). *Calculadora de distribución de Poisson*. https://www.emathhelp.net/es/calculators/probability-statistics/poisson-distribution-calculator/

Estadística e Investigación de Operaciones. (2 de abril de 2014). *Poisson*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=JvtGQfaZSG4

Grillo-Soliz, C. M. (8 de febrero de 2013). *Probabilidad Condicional dados*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=8vSe_7H8g4Q

Hernández, E. (9 de noviembre de 2013). *Probabilidades. Nunca más lo complicado!!!!*. [Archivo d video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=2y6zs8o-YWg

Portal de Divulgación Estadística de la Escuela Andaluza de Salud Pública, Divestadística (s/f). http://www.divestadistica.es/es/diccionario_estadistico.html

Real Academia Española. (2014). Diccionario de la lengua española (23.a ed.). Consultado en http://dle.rae.es/

Restrepo B, LF y González L, J. (2003). La Historia de la Probabilidad. *Revista Colombiana de Ciencias Pecuarias* , 16 (1), 83-87 .http://www.redalyc.org/pdf/2950/295026121011.pdf

Servizo Galego de Saúde. (2014). *Distribuciones de Probabilidad. Epidat 4: Ayuda de Distribuciones de probabilidad. Octubre 2014*. https://www.sergas.es/Saude-publica/Documents/1899/Ayuda_Epidat_4_Distribuciones_de_probabilidad_Octubre2014.pdf

Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro. (s/f). *Tablas.xls*. http://www.uaaan.mx/~jmelbos/tablas/tabest.pdf

WissenSync. (30 de julio de 2015). *Probabilidad Condicional*. [Archivo de video]. YouTube https://www.youtube.com/watch?v=yVvj4dExgao

Fuente de imágenes y tablas

IMÁGENES

1. Estetoscopio

Flickr. (2017). Doctor 022. Recuperado de https://www.flickr.com/photos/152865925@N08/36990862994/in/photolist-YmKQPU-bSRxJH-6R9PkG-7bcGjJ-22sMUfW-ekedKp-ibDjgq-8hzeWj-fjHUW9-aodrVf-HH9U8B-JkuJvA-HH9Tj2-JBeXP5-9SC5ER-pykMCY-4unt5o-74NYVb-7R3wH7-fFdX3Z-HH9SSv-9ozND6-74K5xz-9STx1C-hNhSzg-icGd2E-6AU8Xd-9FzAoF-6cuPWX-ggzYNZ-59HqJp-nNfdvx-q9YH6n-bCGxad-74K4Pz-8cVoLR-G7hBx-caj3wj-bX7i9w-somFFW-777bZc-aUyBwe-Yr5pK9-g4Cxof-hNj7fE-r8WNhW-YmKQPy-eaRQV1-bmS3v6-a1Ni4J

2. Decimales

Flickr. (2008). Reset. Recuperado de https://www.flickr.com/photos/cavarica/3084553421/in/photolist-5Gz9gx-5iTUsm-DGTfA-nudrmQ-oNyoJh-7m7SxG-7kp8Gw-7iJUTQ-nQhtPf-nNMFDQ-nNCt6v-5iTUsf-yXPbir-nNiNdW-nNC8z6-5iPwAV-nud6EB-nLQC5x-6oVDC4-nLGvy2-5QLc8H-d59eoE-nLNbPW-5iPzEg-5iPwAZ-6aajBW-5iPwAM-5iPzEt-5iPzDK-6KbNJP-5iTUs7-5iPwAH-4BBquS-8b8WUp-7kcp9t-7kVujb-q27VRQ-7otUf6-7kjEZx-7iSkg5-7kBtyG-7kxB1k-7koXWo-7kBtDC-4Bbr7h-5iPzEn-odjDxa-cTezJ7-numbxW-nLxLGc

3. Porcentajes en colores

Flickr. (2008). Porcentajes. Recuperado de https://www.flickr.com/photos/17932651@N08/2421019329/in/photolist-4FWmGz-oYHYw4-VYonQu-ajw9pe-iNm7cv-26azZuu-ai7xpj-S9VrM9-Hg3FR8-bAr1r8-8JeH2k-VhuogG-23QpdTW-fQyNW4-ekfMYm-b93UQV-a85ZnD-WyJVeH-nWy9jF-8L45sy-qekixG-96PJYk-bvVaMh-GoAVz-8yNGZq-ekFrvw-78gBc9-91dj1T-8xKo1u-ebJiFV-nGKqno-dr7o4K-czVSjJ-

RNXpFQ-S9VzXC-Sk2GM1-b2doBT-dzP1Y7-ayAx7N-UR52KF-nXiQBX-35UXqt-S9VwQf-jMfvQn-8MjbR9-gs5xQx-WyJYwe-6Twzxz-4Af4Zm-bnCX9t

4. Figura 1

Carballido, M.A. (2018). Diagrama que ilustra la propiedad de complementariedad. Elaboración propia.

5. Figura 2

Carballido, M.A. (2018). Diagrama que ilustra gráficamente un caso de eventos no mutuamente excluyentes. Elaboración propia.

6. Figura 3

Diagrama que ilustra gráficamente un caso de eventos dependientes. Regla de condicionalidad. Elaboración propia.

7. Figura 4

Carballido, M.A. (2018). Diagrama que ilustra gráficamente un caso de eventos no mutuamente excluyentes. Regla de multiplicación. Elaboración propia.

8. Figura 5

Carballido, M.A. (2018). Gráfico de frecuencias para el experimento de medir el color de 120 perros. Elaboración propia.

9. Ecuaciones-Diferenciales

Flickr. (2008). Ecuaciones-Diferenciales. Recuperado de https://www.flickr.com/photos/110559924@N05/11207827825/in/photolist-i5p3JM-7Tx3Zx-7Tx3qi-e4w5gG-AubSpW-7LqC9g-bxASWr-9Wyfqk-6u1ELS-GAyic-aFFqeM-hxBHNa-aBy1pb-bLk5HF-fTobPu-hxBF5K-fTn3ua-5n5CDY-nHoVUe-fTownp-aWohga-gswMxk-fToa9q-7kN8iB-5ovJb3-32AAD4-bsEJA8-4NAzXN-dbmpS2-aVrAE8-cYreJJ-8MqRok-aByP6W-hxDnui-hy1AJK-4srj96-njFXBp-fToaM9-bUbRRU-hy1FkD-c3gy3E-g58Kpn-7yiYAX-dmVAnf-hy3nxZ-hxDo2F-g58WfG-g58JPe-j9Ze3o-e1bQWj

10. Figura 6

Carballido, M.A. (2018). Gráfico de la distribución teórica de probabilidad para el experimento de lanzar un dado. (Distribución uniforme). Elaboración propia.

11. Figura 7

Pérez, J. E. (2016). *Gráfico frecuencia relativa lanzar Dado n veces*. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/tUVaWpvr.

Distribución experimental de probabilidades del lanzamiento de un dado (Distribución de Probabilidad Uniforme). Cinco y 2500 lanzamientos.

12. Figura 8

Carballido, M.A. (2018). Diagrama de árbol que describe las combinaciones posibles al lanzar una moneda 3 veces. Elaboración propia.

13. Figura 9

Carballido, M.A. (2018). Histogramas para ilustrar las características de la distribución de probabilidad de una variable continua. Elaboración propia.

14. Figura 10

Carballido, M.A. (2018). Histogramas y Polígonos de frecuencia. Ejemplo de Distribución de probabilidad de una variable continua. Elaboración propia.

15. Figura 11

Carballido, M.A. (2018). Gráfico que ilustra las características principales de una Distribución Normal. Elaboración propia.

16. Figura 12

Carballido, M.A. (2018). Uso de tabla de Z para el primer ejercicio de Distribución Normal Estándar. Elaboración propia.

17. Figura 13

Carballido, M.A. (2018). Esquema para la solución parcial del ejercicio 2 de la Distribución Normal Estándar. Elaboración propia.

18. Figura 14

Carballido, M.A. (2018). Tablas y gráfico. Primer ejemplo del tema Distribución de la Media de la Muestra. Solo 4 muestras. Elaboración propia.

19. Figura 15

Carballido, M.A. (2018). Tablas y gráfico. Primer ejemplo del tema Distribución de la Media de la Muestra. Todas las muestras posibles. Elaboración propia.

20. Figura 16

Carballido, M.A. (2018). Gráfico que ilustra el área bajo la curva que da respuesta al ejercicio 1 de la sección 1.3.3. Distribución de la Diferencia entra las Medias de Dos Muestras. Elaboración propia.

<u>TABLAS</u>

1. Carballido, M.A. (2018). Relación de los tipos de pensamiento lógico con el concepto de inferencia. Elaboración propia

2. Carballido, M.A. (2018). Tabla de frecuencias para el ejemplo del enfoque “a posteriori” de la probabilidad. Elaboración propia

3. Carballido, M.A. (2018). Tabla de frecuencias para el ejemplo de aplicación de la regla de adición con eventos no mutuamente excluyentes. Elaboración propia

4. Carballido, M.A. (2018). Posibles combinaciones para el experimento de lanzar dos dados. Elaboración propia

5. Carballido, M.A. (2018). Tabla de frecuencias para el experimento de medir el color de 120 perros. Elaboración propia.

6. Carballido, M.A. (2018). Comparación entre las características de una distribución de probabilidad de variable discreta y una distribución de probabilidad de variable continua. Elaboración propia